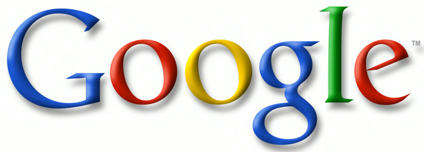
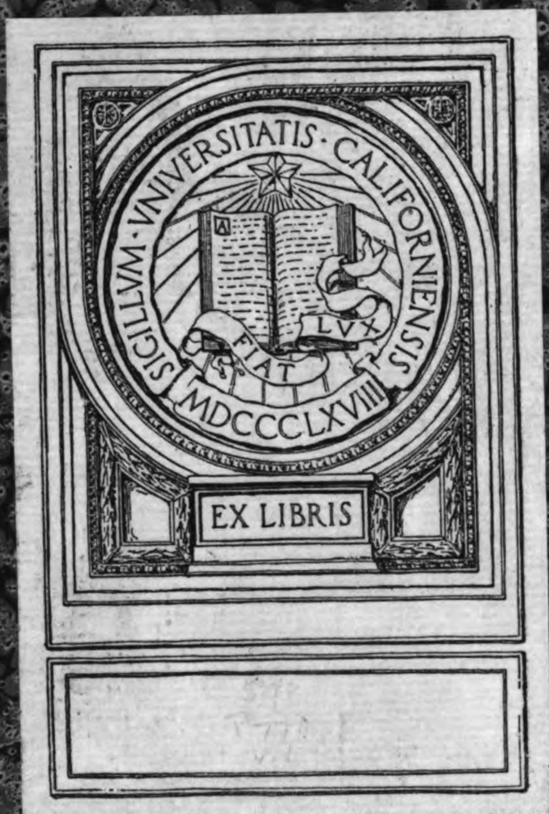
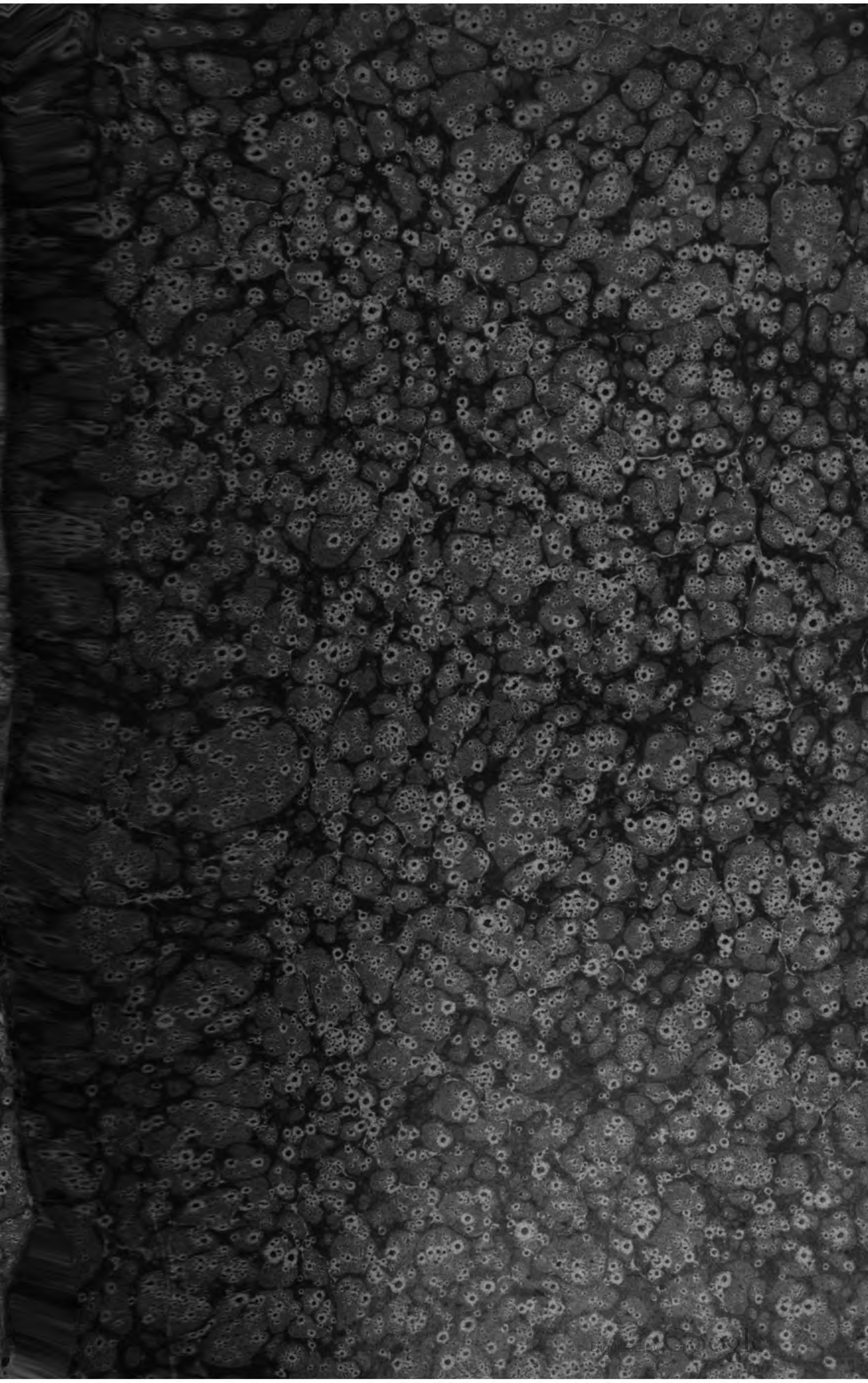



SIGILLVM · VNIVERSITATIS · CALIFORNIENSIS
FIAT LVX
MDCCCLXVIII
EX LIBRIS



ARCHITECTURE NAVALE.

THÉORIE DU NAVIRE.

15842 Paris. — Impr. Gauthier-Villars et Fils, quai des Grands-Augustins, 55.

ARCHITECTURE NAVALE.

THÉORIE DU NAVIRE

PAR

J. POLLARD ET A. DUDEBOUT,

INGÉNIEURS DE LA MARINE,
PROFESSEURS A L'ÉCOLE DU GÉNIE MARITIME.

TOME I.

CALCUL DES ÉLÉMENTS GÉOMÉTRIQUES
DES CARÈNES DROITES ET INCLINÉES. — GÉOMÉTRIE DU NAVIRE.



PARIS,
GAUTHIER-VILLARS ET FILS, IMPRIMEURS-LIBRAIRES
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE.
Quai des Grands-Augustins, 55.

1890

PRÉFACE.

Sous la dénomination générale d'*Architecture navale*, on comprend toutes les connaissances théoriques et pratiques relatives au *Navire*, à l'établissement de ses formes, au choix de ses dimensions, à l'étude de ses qualités nautiques, à la construction de ses diverses parties, à son aménagement, etc.

L'Architecture navale se divise naturellement en deux parties bien distinctes : la *Théorie du Navire* et la *Construction du Navire*.

L'*Architecture navale théorique* ou *Théorie du Navire* embrasse toutes les questions relatives au tracé des plans des bâtiments et aux calculs qui s'y rapportent : elle comprend l'étude géométrique et mécanique des corps flottants dans les diverses circonstances de repos et de mouvement.

La *Construction du Navire* vise plus spécialement la description de la charpente et de ses accessoires, ainsi que les procédés de mise en œuvre des matériaux qui la composent.

Ces deux branches de l'Architecture navale, dont la réunion constitue l'une des parties de l'art de l'Ingénieur naval, font l'objet de deux Cours bien distincts dans l'enseignement de l'École d'Application du Génie maritime, et le présent Ouvrage doit être considéré comme ayant pour complément naturel le Traité de construction publié en 1886 par M. l'Ingénieur de la Marine Hauser (1).

L'Architecture navale théorique fait chaque jour des pro-

(1) *Cours de Construction navale;* par M. A. Hauser; 1886 (Paris, E. Bernard et Cie).

grès incessants; son enseignement en France, depuis l'établissement à Paris, en 1765 ([1]), de l'École des Ingénieurs-Constructeurs, qui devait, trente ans plus tard, devenir l'une des Écoles d'Application de l'École Polytechnique, s'est modifié et complété d'année en année, par les soins de M. Moreau (1816-1830) et surtout de M. Reech (Directeur de l'École d'Application de 1831 à 1870); mais il resta malheureusement oral jusqu'en 1874, époque à laquelle M. Garnier, Ingénieur de la Marine, rédigea le Cours qu'il professait alors, mais dont les deux premières Parties furent seules lithographiées et tirées à un très petit nombre d'exemplaires ([2]).

Dans le présent Ouvrage, déjà fort étendu en raison de la multiplicité des sujets traités, nous ne pouvions songer à suivre pour chaque matière l'ordre chronologique des découvertes et à exposer par le menu les étapes successives de la Science sur les diverses voies d'un si vaste domaine. Nous avons dû nous borner à rendre un compte aussi exact que possible de l'état actuel, tant en France qu'à l'étranger, des connaissances acquises en Architecture navale. La Notice historique et bibliographique qui suit cette Préface rendra du moins un faible hommage à la mémoire des hommes éminents de tous les pays dont les travaux ont le plus contribué à grossir peu à peu l'héritage scientifique de l'Ingénieur maritime.

([1]) Ordonnance royale du 25 mars 1765.

([2]) *Cours d'Architecture navale;* par M. GARNIER, Ingénieur de la Marine. 1874 (Cherbourg, École d'Application du Génie maritime). Première Partie : *Déplacement et stabilité;* seconde Partie : *Hydrodynamique, théorie des vagues, résistance des carènes.*

NOTICE HISTORIQUE ET BIBLIOGRAPHIQUE.

L'Architecture navale est une science d'origine relativement récente, même lorsqu'on l'envisage au point de vue restreint de la construction proprement dite de la charpente. Les règles qui présidaient autrefois à l'édification des navires ne sortaient guère des corporations, ou même des familles de charpentiers-constructeurs. Ces derniers se transmettaient de génération en génération les proportions à observer entre les dimensions de la charpente et les échantillons à attribuer à ses diverses pièces, suivant la grandeur du bâtiment. Les auteurs qui ont publié les premiers les pratiques des constructeurs de leur temps ne remontent qu'aux premières années du XVII[e] siècle. Nous citerons parmi les plus anciens :

1607. **Bartolomeo Crescenzio.** *Nautica Mediterranea.* Roma.

Ouvrage qui eut, en 1625, une nouvelle édition à Venise.

1614. **Pantero-Pantera.** *L'Armata Navale.* Roma.

1622. **Hobier.** *Petit Traité de la fabrication des gallaires et de leur équipage.* Paris.

1629. **Fürttenbach.** *Architectura Navalis.* Ulm.

Ces divers Ouvrages sont purement descriptifs et n'ont d'autre intérêt que celui de nous fournir les dimensions de quelques navires de l'époque.

1643. Le P. **G. Fournier.** *Hydrographie.*

Sorte de compilation ou d'encyclopédie maritime, contenant la théorie et la pratique de toutes les parties de la navigation. Ce curieux Ouvrage fut réédité en 1667 et en 1679. Il renferme tout ce que l'on possédait de connaissances maritimes au milieu du XVII[e] siècle.

1646. **Ruberto Dudleo,** duca di Nortumbria. *Arcano del mare.* Firenze.

1668. **Van Ryk.** *L'Art de bâtir les vaisseaux.* La Haye.

1670. Sir **Henry Manwayring.** *The seaman's dictionary.* London.

1671. Le P. **Pardies.** *Traité de Géométrie.*

Dans ce petit Traité, le P. Pardies aborde pour la première fois le problème de la dérive et cherche à le résoudre à l'aide des notions de Mécanique, alors très élémentaires (Chapitre des *Forces mouvantes*). C'est, croyons-nous, le premier essai d'application à une question d'Architecture navale des ressources de la Mécanique, science encore à ses débuts.

1671. **Nicolas Witsen.** *Sheeps bouw en bestier.* Amsterdam.

L'Auteur, bourgmestre d'Amsterdam, hôte de Pierre le Grand et constructeur renommé, avait eu la gloire de construire la flotte de Ruyter. L'apparition de cet Ouvrage, où les principes de la construction des navires étaient accompagnés d'importants développements historiques et archéologiques, eut un retentissement énorme en Europe. Les États de Hollande, jaloux de posséder un constructeur aussi habile, interdirent l'exportation de ce livre, dont un seul exemplaire put parvenir à la Bibliothèque du Louvre.

1674. Sir **W. Petty.** *Discourse made before the Royal Society.* London.

1677. **Dassié.** *L'Architecture navale.* Paris.

Cet Ouvrage, purement pratique, ne contient que des énumérations de pièces de charpente et accessoires, avec leurs principales dimensions.

Les *Ordonnances de* **Colbert** (1681-1689), relatives à la Marine de commerce et aux arsenaux, ne renferment que peu de documents intéressant l'Architecture navale proprement dite.

1681. **Johannes de Vivie.** *W. a Winschootens Seeman.* Leiden.

1687. **Desroches.** *Dictionnaire de Marine.* Paris.

1689. Le chevalier **Renau.** *Manœuvre des vaisseaux.* Paris.

Les premières questions de théorie du navire comportant l'application de spéculations mathématiques furent la *Dérive* et la *Marche au plus près* qui sont traitées dans ce petit Livre et qui provoquèrent entre les contemporains de longues discussions. On retrouve, dans le *Journal des Savants,* les traces de la polémique qu'échangèrent à cette époque, avec Renau, Huygens, Parent, L'Hôpital et Jean Bernoulli, polémique qui se

termina par la publication, en 1714, de l'*Essay*, de Jean Bernoulli, dont il sera fait mention tout à l'heure.

1689. Le chevalier **Barras de la Penne**. *Dictionnaire de Marine*.

1691. **Anonyme**. *Construction des vaisseaux du Roy*. Le Havre-de-Grâce.

1691. Sir **W. Petty**. *An account of several new inventions. Also a treatise of Naval Philosophy*. London.

1693. **Anonyme**. *Vocabulario marittimo*. Sevilla.

1695. **Allard**. *Nieuwe Sheepsbouw*. Amsterdam.

1696. Le P. **Paul Hoste**. *Art des armées navales* ou *Traité des évolutions navales*. Lyon.

L'Auteur, chapelain de l'escadre de Tourville et professeur de Mathématiques au Séminaire royal de Toulon, fit suivre presque immédiatement cet Ouvrage de tactique du Traité d'Architecture navale ci-après.

1697. Le P. **Paul Hoste**. *Théorie de la construction des vaisseaux*. Lyon.

L'Auteur a recours, dans ce Traité, aux notions, encore bien élémentaires, de l'époque sur la résistance des matériaux et la Mécanique appliquée. On y rencontre la description d'une sorte d'expérience de stabilité et de vagues indications sur les mouvements de roulis et de tangage.

1697. **Van Yk**. *Sheepsbouw Konst*. Amsterdam.

1698. **Jean Bouguer**, le père. *Traité complet de navigation*. Paris.

1702. **Aubin**. *Dictionnaire de Marine*, Amsterdam.

Cet Ouvrage eut de nombreuses éditions.

1706. **John Hardingham**. *The accomplished Shipwright and Mariner*. London.

1711. **W. Sutherland**. *Shipbuilder's Assistant*. London.

1713. **H. Parent**. *Essais et Recherches de Mathématiques et de Physique*. Paris.

1714. *Art de bâtir les vaisseaux*. Amsterdam.

1714. **Jean Bernoulli**. *Essay d'une nouvelle théorie de la manœuvre des vaisseaux*. Basle.

Ce célèbre Traité fut écrit, comme nous l'avons dit, en réponse à celui du chevalier Renau.

1717. **W. Sutherland.** *Mystery of Shipbuilding unveiled.* London.

1719. **Falconner.** *An universal Dictionary of the Marine.* London.

1727. **Bouguer.** *De la mâture des vaisseaux.* Paris.

Ce Mémoire, couronné par l'Académie des Sciences, ouvre la série des travaux de l'illustre auteur sur les Constructions navales et la Navigation.

1731. **Pitot.** *La Théorie de la manœuvre des vaisseaux.* Paris.

1732. Don **Ant. Gabriel Fernandez.** *Practica de Maniobras de los Navios.* Cadiz.

1745. **Saverien.** *Nouvelle théorie de la manœuvre des vaisseaux.* Paris.

1746. **Bouguer.** *Traité du navire, de sa construction et de ses mouvements.* Paris.

Dans ce très important Traité, véritable début de l'Architecture navale théorique, l'Auteur aborde toutes les questions théoriques et les traite avec une méthode et une précision remarquables. Il indique le moyen de calculer à l'avance la capacité du navire, puis, grâce à la notion du *métacentre* qu'il introduit en Hydrostatique, les éléments de sa stabilité. Il n'est pas inutile de faire remarquer que, jusqu'à cette époque, les constructeurs effectuaient peu ou point de calculs sur les plans des bâtiments; les méthodes d'intégration numérique étaient peu répandues et l'assimilation du contour des couples à des portions d'ellipses ou même de circonférences était souvent la seule ressource.

1749. **Léonard Euler.** *Scientia Navalis.* Saint-Pétersbourg.

Dans ce Mémoire, l'Architecture navale revêt la forme la plus théorique. L'Ouvrage, entièrement écrit en latin, ne comporte guère que des calculs abstraits. On y trouve, entre autres choses, la détermination et le rôle du moment d'inertie d'une flottaison et les propriétés les plus immédiates des flottaisons isocarènes.

1750. **Saverien,** Ingénieur de la Marine. *Mesure du sillage des vaisseaux.* Paris.

On trouve dans cet Ouvrage une des premières applications des tubes dits *de Pitot* à la mesure de la vitesse des navires.

1752. **Duhamel du Monceau.** *Éléments de l'Architecture navale.* Paris.

L'Auteur était à cette époque Inspecteur des constructions

de la Marine royale et chargé en cette qualité de surveiller l'enseignement que les maîtres charpentiers, en vertu de l'Ordonnance royale du 15 avril 1689, donnaient dans chacun des arsenaux aux officiers et gardes de la Marine sur la construction navale. Son Ouvrage, très méthodique, et dont le titre répond bien à la signification que nous lui attribuerions aujourd'hui, renferme la description de la charpente, les règles de tracé des plans de formes et les méthodes à suivre pour les calculs à effectuer sur ces plans; il devait, quelques années plus tard, devenir la base de l'enseignement à l'École unique des Ingénieurs-Constructeurs qui fut créée à Paris en 1765.

A partir de l'année 1753, l'Académie des Sciences, qui depuis 1720 avait déjà proposé en prix quelques questions de Navigation ou de Construction navale, proposa aux savants de tous les pays plusieurs questions importantes d'Architecture navale. Ces concours eurent pour résultat la présentation de Mémoires très intéressants, que nous indiquerons à leur date, et dont un grand nombre furent couronnés et publiés dans la collection de neuf Volumes (1721-1777) du *Recueil des pièces qui ont remporté les prix de l'Académie des Sciences,* ou aussi séparément. A partir de 1776 et jusqu'en 1786, les Mémoires couronnés par l'Académie, que nous citerons, se trouvent dans les *Mémoires présentés par divers savants.*

1753. **Daniel Bernoulli, Mathon de la Cour, Pereyre, Léonard Euler.** *La manière la plus avantageuse de suppléer à l'action du vent sur les vaisseaux, soit en y appliquant les rames, soit en employant quelque autre moyen que ce puisse être.* Paris. (Prix de l'Académie des Sciences.)

1754. **P. Bouguer.** *Solution des principaux problèmes de la manœuvre des vaisseaux*, et (1755), du même, second Mémoire sur le même sujet (*Mémoires de l'Académie des Sciences*). Paris.

1755. **Chauchot,** Sous-Constructeur des vaisseaux du Roy. *La manière de diminuer le plus qu'il est possible le roulis et le tangage d'un navire, sans qu'il perde sensiblement, par cette diminution, aucune des bonnes qualités que sa construction doit luy donner.* Paris. (Prix de l'Académie des Sciences.)

1757. **Daniel Bernoulli.** Même question qu'en 1755 sur le roulis et le tangage. Paris. (Prix de l'Académie des Sciences.)

C'est dans ce dernier Mémoire que fut exposée la théorie du roulis, qui resta classique, sous le nom de *théorie de Bernoulli,* jusqu'au milieu du XIXe siècle.

1757. **Bouguer.** *De la manœuvre des vaisseaux.* Paris.

1757. **De Villeneuve.** *Science de la Marine.* La Haye.

1757. **W. Udemans.** *Korte Verhandeling van den Nederlandschen Scheepsbouw, zo in Theorie als in Practik.*

1758. **Saverien.** *Dictionnaire de Marine.* Paris.

1759. **Léonard Euler, Groignard,** Constructeur des vaisseaux du Roy. *L'examen des efforts qu'ont à soutenir toutes les parties du vaisseau dans le roulis et dans le tangage, et la meilleure manière de procurer à leur assemblage la solidité nécessaire pour résister à ces efforts sans préjudicier aux bonnes qualités du vaisseau.* Paris. (Prix de l'Académie des Sciences.)

1759. **L. Zwyndregt.** *Verhandeling van den Hollandschen Scheepsbouw.* S'Gravenhage.

1760. **Clairaut.** *Nouvelles solutions de quelques problèmes sur la manœuvre des vaisseaux* (*Mémoires de l'Académie des Sciences*). Paris.

1761. L'abbé **Bossut, Jean-Albert Euler.** *La meilleure manière de lester et d'arrimer un vaisseau, et les changements qu'on peut faire en mer à l'arrimage, soit pour mieux faire porter la voile au navire, soit pour lui procurer plus de vitesse, soit enfin pour le rendre plus ou moins sensible au gouvernail.* Paris. (Prix de l'Académie des Sciences.)

1765. L'abbé **Bossut, Bourdé de Villehuet,** Officier des vaisseaux de la Compagnie des Indes, **Groignard, Gautier,** Ingénieur de la Marine d'Espagne. *Quelles sont les méthodes usitées dans les ports pour lester et arrimer les vaisseaux de toutes sortes de grandeurs et de différentes espèces, le poids et la distribution des matières qu'on y employe,* etc.? Paris. (Prix de l'Académie des Sciences.)

1765. **Mungo Murray.** *A treatise on Shipbuilding.* London.

Ouvrage cité par Chapman et où l'auteur s'est inspiré de Bouguer et de Duhamel du Monceau.

1768. **Frédéric de Chapman.** *Architectura navalis mercatoria.* Stockholm.

Ouvrage en Planches ou Atlas dans lequel le célèbre con-

structeur et amiral suédois a réuni un grand nombre de plans de formes très remarquablement représentés. Cet Atlas est accompagné d'un écrit où les calculs de toutes sortes sont mentionnés avec détails.

1771. **Duranti de Lironcourt.** *Instruction élémentaire et raisonnée sur la construction pratique des vaisseaux*. Paris.

1775. Don **Georges Juan**, traduit par **Lévêque**. *Examen maritime*. Nantes.

Cet important Ouvrage, qui parut en Espagne en 1771, comporte de grands développements mathématiques sur toutes les branches de l'Architecture navale théorique.

1775. **Heuvert.** *Éléments d'Architecture navale*.

Mémoire écrit en latin par l'auteur allemand.

1776. **Léonard Euler.** *Théorie complète de la construction et de la manœuvre des vaisseaux*. Paris.

Traité où les théories relatives à la dérive, à la stabilité, etc., sont mieux condensées et exposées que dans la *Scientia Navalis*.

1776. **Du Maitz de Goimpy.** *Traité sur la construction des vaisseaux*. Paris.

1776. **Vial du Clairbois**, Sous-Ingénieur-Constructeur. *Essai géométrique et pratique sur l'Architecture navale*. Paris.

1779. **Frédéric de Chapman**, traduit par l'Astronome **Lemonnier**. *Traité de la construction des vaisseaux*. Paris.

1781. **Fr. de Chapman**, traduit par **Vial du Clairbois.** *Traité de la construction des vaisseaux*. Brest et Paris.

Le *Traité de la construction des vaisseaux* de Chapman avait paru en Suède en 1775. On y retrouve dans le douzième Chapitre la reproduction exacte de l'écrit qui accompagnait l'Atlas cité plus haut (*Architectura navalis mercatoria*). C'est dans ce Traité que Chapman a fait connaître ses recherches sur la résistance des carènes.

1781. **Marmaduke Stallkart.** *Naval Architecture*. London.

1783-87. **Vial du Clairbois, Blondeau, du Val le Roi.** *Encyclopédie méthodique* (article *Marine*). Paris.

Toute la Science navale à la fin du XVIIIe siècle est condensée

dans cet article, très développé (il forme à lui seul trois Volumes de texte et un de planches) et de la plus haute importance, de la fameuse *Encyclopédie méthodique* éditée par Panckouke. Cet article a aussi été édité séparément sous le nom de *Dictionnaire de Marine*.

1784. **E.-W. Stibolt.** *Afhandeling om Skibes-kiölbraekkelighed.* Kiöbenhaven.

1787. **Fr. de Chapman.** *Ueber die richtige Art, die Höhe des Schwerpunkts eines Schiffes anzugeben* (Traduction allemande des *Mémoires de l'Académie des Sciences de Suède*, vol. VIII). Hamburg et Leipzig.

1787. **W. Hutchinson.** *Treatise on practical Seamanship.* Liverpool.

1787. **Romme.** *L'Art de la Marine.* La Rochelle.

1787. **Vial du Clairbois.** *Traité élémentaire de la construction des vaisseaux,* à l'usage des élèves de la Marine. Paris.

1789. **De Missiessy-Quiès,** Lieutenant de vaisseau. *Arrimage des vaisseaux.* Paris.

1791. Don **Francisco Ciscar.** *Reflexiones sobre las Maquinas y Maniobras.* Madrid.

1791-92. *A Collection of papers on Naval Architecture.* London.

1792. **Romme.** *Dictionnaire de la Marine française.* Paris.

Le premier et unique Volume des *Mémoires de l'Académie de Marine*, publiés à Brest vers ce temps, ne contient aucun écrit intéressant l'Architecture navale.

Ce n'est aussi que pour mémoire que nous mentionnerons l'*Art de la voilure* de Romme, le *Traité du gréement* de Lescallier et le *Traité de mâture* de Forfait, Ouvrages bien connus, mais qui n'ont aucun rapport avec les questions de Théorie du Navire.

1794-98. **J.-H. Röding.** *Allgemeines Wörterbuch der Marine* (en neuf langues). Hamburg et Halle. Avec indication de la plupart des Ouvrages maritimes en tous genres parus jusqu'en 1793.

1796-98. **Atwood.** *Disquisition on the stability of ships* (deux Mé-

moires insérés dans les *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*). London.

On trouve pour la première fois, dans ces importants Mémoires du célèbre physicien anglais, le calcul du couple de redressement d'un corps flottant incliné d'un angle fini quelconque. Les auteurs anglais désignent encore souvent aujourd'hui sous le nom de *formule d'Atwood* celle qui donne le bras de levier de ce couple calculé par la méthode des onglets.

A partir de l'année 1800 à laquelle nous sommes arrivés, les travaux sur la *Théorie du navire* se multiplient et se spécialisent; en même temps l'enseignement de cette branche des Sciences prend de l'extension en Europe. C'est ainsi qu'en 1811 se fonde en Angleterre, à Portsmouth, la première *École royale d'Architecture navale*, sur les instances d'une Société qui s'était elle-même formée en ce pays, quinze ans auparavant, la *Society for the improvement of naval Architecture*. Cette première École fut dirigée par le Dr Inman, auteur d'une traduction anglaise de Chapman. Supprimée en 1832, puis rétablie à Portsmouth, en 1848, sous le nom d'*École centrale de Mathématiques et de Construction navale*, et placée sous la direction du Dr Woolley, elle subit, au bout de cinq ans environ, une nouvelle interruption et ne fut rétablie qu'en 1864, à Londres cette fois, à l'instigation d'une Société célèbre, fondée en 1860, l'*Institution of naval Architects*. Cette nouvelle et troisième École (*Royal School of naval Architecture and marine Engineering*) subsista à South-Kensington jusqu'en 1873, sous la direction du Dr Woolley et de C.-W. Merrifield. Depuis cette époque, elle a été transférée, par ordre de l'Amirauté, au *Royal naval College* de Greenwich, établissement de programme plus étendu dont elle forme une division. Comme l'École française du Génie maritime, l'École anglaise d'Architecture navale, sous ses quatre formes successives, a été une pépinière de savants et de constructeurs distingués, parmi lesquels on remarque MM. Isaac Watts, Samuel Read, Moorsom, Creuze, élèves de la première École; Barnes, Edward J. Reed, Barnaby, élèves de la deuxième; White, Elgar et William John, élèves de la troisième.

Dès maintenant, notre Notice bibliographique, en raison même de l'extension prise au XIXe siècle par la littérature scientifique maritime, ne pourra plus se contenter, pour les citations des *principaux* Ouvrages à consulter, de l'ordre purement chronologique; nous devrons classer en outre ces Ouvrages par ordre de matières, en commençant par un certain nombre de travaux descriptifs ou historiques.

I. — Ouvrages descriptifs ou historiques.

1801. **John Charnock.** *An History of marine Architecture*. London.

1799-1802. **J.-E. Montucla.** *Histoire des Mathématiques*, contenant l'*Histoire des progrès de la Navigation*. Paris.

1851. **John Fincham.** *An History of naval Architecture.* London.

1855. **Ch. Dupin.** *Tableau de l'Architecture navale aux* XVIIIe *et* XIXe *siècles.* Paris. [Exposition universelle de 1851. Travaux de la Commission française (2e groupe, 8e jury) sur l'industrie dès nations].

1860. **Joseph Woolley.** *On the present state of the mathematical theory of naval Architecture,* Mémoire inséré dans le premier Volume des *Transactions of the naval Architects.* London.

1881. **W.-H. White.** *The Progress of Shipbuilding in England,* article de la *Westminster Review* (janvier 1881). London.

1884. **David Pollock.** *Modern Shipbuilding.* London.

II. — Traités complets de Théorie du navire.

Au commencement du XIXe siècle, les traités complets de *Théorie du Navire* sont surtout fréquents en Angleterre, où ils sont dus en majeure partie aux professeurs ou aux élèves des trois Écoles successives d'Architecture navale, tels que Fincham, Peake, Creuze, Watts, Barnes, Thearle, White, etc.

1805. **David Steel.** *The Elements and Practice of naval Architecture.* London.

L'auteur de cette compilation très complète et très bien ordonnée était un libraire, qui publia en outre plusieurs aide-mémoire de dimensions plus modestes, comme le *Shipwright's vade-mecum.*

1806. **P.-H. Suzanne.** *Éléments théoriques et pratiques de la manœuvre des vaisseaux.* Paris.

1822. **Rijk.** *Scheepsbouw.* Rotterdam.

1826. **De Poterat,** Capitaine de vaisseau. *Théorie du Navire.* Paris.

Cet Ouvrage s'inspire surtout de don Georges Juan.

1827. **Korth.** *Die Schiffbaukunst.* Berlin.

1849. **John W. Griffith,** Constructeur maritime. *Treatise on marine and naval Architecture.* New-York.

1849. **James Peake.** *Rudiments of naval Architecture.* London.

1850. **John Fincham.** *An Outline of Shipbuilding.* London.

1850. **Uggla.** *Anleitung zum Schiffbau* (traduction allemande de l'Ouvrage suédois). Hamburg.

1851. **Augustin F.-B. Creuze.** *Treatise on the theory and practice of Naval Architecture.* Edinburg.

Ce Traité forme l'article *Shipbuilding* dans l'*Encyclopædia Britannica.*

1852. **J. Krantz**, Lieutenant de vaisseau. *Éléments de la Théorie du Navire.* Toulon.

Dans ce dernier Livre, l'Auteur, aujourd'hui Vice-Amiral, reproduit la théorie classique du métacentre, donne le calcul du bras de levier du couple de stabilité pour des angles finis, et aborde les théories du roulis et du gouvernail.

1852. Lord **Montagu.** *Naval Architecture.* London.

1857. **Carl Mielighofer.** *Anleitung zur Schiffbaukunst.* Vienne.

1859. **B.-J. Tideman.** *Verhandeling over de Scheepsbouwkunde als Wetenschap.* Amsterdam.

1861. **Andrew Murray.** *The theory and practice of Shipbuilding.* Edinburgh.

Ouvrage formant l'article *Shipbuilding* dans la seconde édition de l'*Encyclopædia Britannica.*

1863. **Ad. d'Etroyat.** *Traité élémentaire d'Architecture navale.* Paris.

1864. **N.-C. Kierkegaard.** *Praktisk Skeppsbyggnadskonst.* Göteborg.

1864. **Julius Prömmel.** *Anleitung zum Schiffbau.* Hamburg.

L'auteur de ce dernier Ouvrage, ingénieur dans la Marine autrichienne, a mis à contribution le Traité suédois d'*Architecture navale* de G.-L. Uggla.

1865. **John Scott Russell.** *The modern system of naval Architecture.* London.

C'est dans cet Ouvrage, aussi vaste par le format que par l'étendue des sujets traités, que se trouve la théorie spéciale de l'Auteur sur la résistance des carènes (*wave line theory*).

1865. **M. Okunewuin.** *Théorie et pratique de l'Architecture navale* (en russe). Saint-Pétersbourg.

1866. **B. Sharpe.** *Naval Architecture, as affected by the laws governing the transition of curves* (insérée aussi dans le *Journal of the Royal United Service Institution*). London.

1866. **W.-J. Macquorn Rankine.** *Shipbuilding theoretical and practical.* London.

Ce Traité de construction a été publié par Rankine, professeur de Génie civil à l'Université de Glasgow depuis 1855, en collaboration avec Isaac Watts, Frederick K. Barnes, et James Robert Napier. C'est une sorte d'encyclopédie, en sept divisions, de toutes les branches de la construction maritime, coque et machines. Les deux premières divisions (*Hydraulics* et *Geometry of Shipbuilding*) intéressent seules la Théorie du Navire. Elles renferment des théories originales de Rankine sur l'action des propulseurs et sur la résistance des fluides : cette dernière est très connue sous le nom de *théorie des lignes de courant* (*Stream-line theory*).

1870. **C.-F. Steinhaus,** Ingénieur naval et Professeur à Hambourg. *Der Eisen-Schiffbau.* Hamburg.

1871. **A.-B. Münter.** *Ledetraad ved Underviisningen i Skibsbygning paa Söofficeers-Skolen.* Kjöbenhavn.

1874. **T. Garnier.** *Cours de Théorie du Navire de l'École d'application du Génie maritime* [lithographié (1)].

1877. **Samuel J.-P. Thearle.** *Theoretical naval Architecture.* London et Glasgow.

1877. **W.-H. White.** *Manual of naval Architecture.* London.

1879. **V. Lutschaunig.** *Die Theorie des Schiffes.* Trieste.

La deuxième édition de ce petit Livre très complet et bien condensé a été traduite en français par M. Auradou, ingénieur de la Marine, et a paru à Paris en 1885.

1881. **Friba.** *Vorträge über Schiffbau an der K. K. Marine Akademie* (lithographié). Fiume.

1885. **A.-E. Arkenbout Schokker.** *Desamentstelling van schepen.* Helder.

1885. **S. Manasse.** *Elementi di Teoria della Nave ad uso delle scuole di Costruzione navale.* Livorno.

---

(1) *Voir* la Préface.

1886. **J. Pollard.** *Cours de Théorie du navire de l'École d'application du Génie maritime* (lithographié). Paris.

1887. **E. Guyou.** *Théorie du Navire.* Ouvrage couronné par l'Académie des Sciences en 1887. Paris.

1888. **A. van Hullen.** *Leitfaden für den Unterricht im Schiffbau an den Lehranstalten der K. deutschen Marine.* Kiel.

1889. **J.-C. Tuxen,** Sous-Directeur. *Lærebog i skibsbygningens theoriske Del* (Cours lithographié de Théorie du navire professé à l'École de Marine de Copenhague). Kjöbenhavn.

III. – Ouvrages périodiques et Mélanges maritimes scientifiques.

Annales Maritimes. Paris. Créées en 1809.

The Artizan. London. Créé en 1843.

Nautical Magazine. London. Créé en 1843.

Mémorial du Génie maritime. Paris. Créé en 1847 (1).

Philosophical Transactions of the Royal Society of London. London. Créé en 1847 (2).

Journal of the Royal United Service Institution. London. Créé en 1857.

Institution of Engineers and Shipbuilders in Scotland. Créé en 1858.

Scientific american. New-York. Créé en 1859.

Transactions of the Institution of Naval Architects. London. Créé en 1860 (3).

Revue maritime et coloniale. Paris. Créée en 1861 (4).

Hansa (Zeitschrift für Seewesen), rédigé par W. von Freeden. Bremen et Hamburg. Créé en 1864.

Archiv für Seewesen. Triest. Créé en 1865.

Engineering. London. Créé en 1866.

Rivista Marittima. Roma. Créée en 1868.

The Annual of the Royal School of Naval Architecture and Marine Engineering. London. Créé en 1871 (5).

(1) Abréviations : *Mém. G. M.*
(2) » *Phil. Trans. Roy. Soc.*
(3) » *Trans. Nav. Arch.*
(4) » *Rev. Mme.*
(5) » *Annual.*

Annali dei Regi Istituti Tecnico e Nautico e della Regia Scuola di Costruzioni Navali di Livorno. Livorno. Créé en 1871.

Marine Verordnungs Blatt. Berlin. Créé en 1871.

Naval Science. London. Créé en 1872.

Mittheilungen aus dem Gebiete des Seewesens. Pola. Créé en 1873 pour continuer les *Archiv für Seewesen.*

United States Naval Institute. New-York. Créé en 1874.

L'Année maritime. Paris. Créé en 1877.

Marine Engineer. London. Créé en 1879.

Mededeelingen betreffende het Zeewesen. S'Gravenhage. Créé en 1880.

Tidskrift for Söväsen. Kiöbenhaven.

Tidskrift i Sjövasendet. Stockholm.

Morskoï Sbornik. Saint-Pétersbourg.

Revista general de Marina. Madrid.

IV. — Géométrie et Statique du navire. — Stabilité.

1804. **Fr. de Chapman.** *Architectura navalis bellica. Försök till en theor. Afhandling att gifva ät Linieskepp deras rätta storlek och form, likaledes för Fregatter och mindre brukbare Fartyg.* Carlskrona. Atlas de 50 planches.

1810. **Bonjean.** *Nouvelles échelles de solidité et de centre de gravité de carène.* Lorient.

1822. **Charles Dupin,** Capitaine du Génie maritime. *Applications de Géométrie et de Méchanique à la Marine*, etc. Paris.

Cet Ouvrage fait suite aux *Développements de Géométrie* (Paris, 1813) où Dupin donnait la théorie de l'indicatrice. Dans les *Applications,* il crée la théorie géométrique des isocarènes; à l'aide des relations entre l'indicatrice de la surface des centres de carène en un point et l'ellipse d'inertie de la flottaison correspondante, il étudie l'influence, sur la stabilité, de l'orientation du couple d'inclinaison. Cette théorie devint classique à l'École d'application du Génie maritime, et y fut l'objet d'intéressants développements de la part de Reech et d'Émile Leclert.

1830. **P.-J. Moreau.** *Principes fondamentaux de l'équilibre et du*

mouvement des corps flottants dans deux milieux résistants. Lorient.

Dans ce travail extrait du Cours qu'il professait à l'École du Génie maritime, Moreau, pour la première fois, aborda le problème de la stabilité des corps flottants au point de vue dynamique. Il établit les principes de l'équilibre des corps plongés dans deux fluides, en fit l'application aux flotteurs baignés par l'air et l'eau, montra que, dans l'état d'équilibre, le centre de gravité général du flotteur et des milieux est le plus bas (stabilité) ou le plus haut (instabilité), puis résolut le problème des petites oscillations des corps flottants.

1832. **J.-M.-C. Duhamel.** *Mémoire sur la stabilité des corps flottants.* Paris.

Ce Mémoire, présenté en 1832 à l'Académie des Sciences, a été inséré en 1835, dans le XXIVe Cahier du *Journal de l'École Polytechnique.* Duhamel y montre l'insuffisance de la théorie de Bouguer, où, par une restriction fâcheuse, le volume immergé est supposé rester constant; mais il a le tort d'y changer la définition du métacentre, et d'en faire, dans le cas général du volume immergé variable, le point de rencontre de la poussée et de la verticale primitive. Il est évident qu'en adoptant *a priori* une semblable définition du métacentre, on est conduit à la considération d'un point absolument indéterminé. D'ailleurs, Duhamel arrive en dernière analyse au même énoncé que Bouguer pour la condition de stabilité, montrant ainsi uniquement que les restrictions faites par ce dernier étaient inutiles. Ce résultat est facile à comprendre, si l'on considère que l'équilibre ne peut être dit *stable* pour un flotteur, que si cette stabilité est assurée pour toutes les circonstances possibles, même pour la plus désavantageuse, qui se trouve être précisément celle dans laquelle le volume de la carène reste constant, d'après l'équation même à laquelle parvient Duhamel.

1833. **S.-D. Poisson.** *Traité de Mécanique* (contenant la théorie de la stabilité des corps flottants fondée sur la considération des forces vives et l'étude des petites oscillations). Paris.

1840. **Aug. Bravais,** Lieutenant de vaisseau, ancien Élève de l'École Polytechnique. *Sur l'équilibre des corps flottants* (*Thèse de Mécanique*). Paris.

C'est dans cette thèse, où Bravais développe longuement la théorie géométrique des courbes auxquelles conduit l'étude des isocarènes, que l'on trouve pour la première fois l'assimilation de la courbe des centres de carène à des développantes de cercle de divers ordres. Pour ce qui concerne la stabilité, l'auteur, se

basant sur ce que, dans la position d'équilibre stable, le centre de gravité du système formé par le flotteur et le liquide environnant doit être le plus bas possible, démontre que dans cette position la ligne qui joint le centre de gravité au centre de carène doit être une normale *minima* à la surface des centres de carène.

1850. **H. Moseley.** *On the dynamical stability and on the oscillations of floating bodies.* London.

Ce beau Mémoire, longtemps ignoré en France, est inséré dans le deuxième Volume de l'année 1850 des *Phil. Trans. Roy. Soc.* L'auteur y cherche l'expression du travail nécessaire pour faire atteindre au flotteur une inclinaison donnée, cette quantité de travail formant la mesure de la stabilité relative d'un flotteur. Sa formule, depuis longtemps classique en Angleterre, y porte le nom de *formule de Moseley.*

1853. **Duhamel.** *Cours de Mécanique.* Paris.

On retrouve dans ce Cours les théories déjà signalées dans le *Traité de Mécanique* de Poisson, sur la stabilité et les petites oscillations des corps flottants.

1859. **Clebsch.** *Ueber das Gleichgewicht schwimmender Körper.*

Le géomètre allemand, dans ce Mémoire inséré dans le *Journal de M. Crelle* (année 1859), montre que, pour avoir une théorie rigoureuse, il faut avoir égard aux variations de la pression du liquide provenant des petites ondulations que le mouvement du corps lui communique. Il reproche à Duhamel d'avoir admis que la poussée était dans le mouvement la même qu'à l'état statique. Pour le calcul du terme correctif, Clebsch applique à la recherche du mouvement oscillatoire infiniment petit du flotteur et du liquide les ressources les plus élevées de l'Analyse mathématique et ne parvient, d'ailleurs, au point de vue de la condition de la stabilité de l'équilibre, qu'à des considérations assez obscures sans conclusion pratique immédiate.

1861. **Samuel Read.** *On an improved method of calculating the hydrostatic stability of ships* (*Trans. Nav. Arch.*, vol. II). London.

1861. **Fred. K. Barnes.** *On a new method of calculating the statical and dynamical stabilities of a ship* (*Trans. Nav. Arch.*, vol. II). London.

1864. **F. Reech, C. Jordan.** *Donner une théorie rigoureuse et complète de la stabilité de l'équilibre des corps flottants.* Paris. (Prix de l'Académie des Sciences.)

En 1864, l'Académie des Sciences proposa, pour le grand prix

des Sciences mathématiques, d'établir une théorie complète et rigoureuse de la stabilité des corps flottants. Le prix fut partagé entre MM. Reech et Jordan.

Reech avait présenté à cette occasion une copie du Cours d'équilibre et de stabilité qu'il professait depuis de longues années à l'École du Génie maritime, et dans lequel il envisageait l'effet de la variation du volume immergé et celui de la force vive communiquée au liquide environnant.

M. Jordan étudie les mouvements du flotteur avec volume immergé variable, mais en négligeant la force vive communiquée au liquide, ainsi que le terme correctif dû, pour la poussée, à l'état de mouvement.

1865. **Edm. Bour.** *Cours de Mécanique et Machines.* Paris.

Dans ce Cours, l'auteur cite les travaux de Duhamel et de Clebsch, et termine par la remarque que le terme correctif de la poussée ne peut qu'être favorable à la stabilité, parce que ce terme se compose d'une surpression sur la paroi antérieure, et, à cause du vide à l'arrière, d'une dépression sur la paroi postérieure du corps, les deux effets se réunissant pour s'opposer au mouvement. Il montre ainsi que la théorie ordinaire de la stabilité fait connaître des conditions suffisantes, sinon nécessaires.

1866. **L.-V. Turquan.** *Recherche sur la stabilité de l'équilibre des corps flottants.* Paris.

C'est une thèse de Mécanique dans laquelle ne se trouve malheureusement point le développement des calculs de l'Auteur pour montrer que l'influence des petits mouvements du liquide sur la poussée ne modifie pas les conditions de la stabilité de l'équilibre.

1867. **C.-W. Merrifield.** *Recent improvements in the calculation of the statical stability of ships,* suivi de remarques par **Robert Rawson** (*Trans. Nav. Arch.*, vol. VIII). London.

1868. **E.-J. Reed.** *On the stability of monitors under canvas* (*Trans. Nav. Arch.*, vol. IX). London.

1869. **C.-W. Merrifield.** *First report of the Committee of the British Association on the stability, propulsion, and seagoing qualities of ships.* Exeter.

1870. **P. Risbec,** Ingénieur de la Marine. *Note au sujet du calcul des coordonnées des centres de carène et du tracé des développées métacentriques* (insérée dans la 3e livr., 1870, du *Mém. G. M.*). Paris.

1870. **Émile Leclert**, Ingénieur de la Marine. *Note sur la relation existant entre la courbure de la surface des flottaisons d'un flotteur et la hauteur métacentrique* (insérée dans la 5e livr., 1870, du *Mém. G. M.*). Paris.

1871. **W.-H. White** et **W. John.** *On the calculation of the stability of ships and some matters of interest connected therewith* (*Trans. Nav. Arch.*, vol. XII). London.

1871. **Nathaniel Barnaby.** *On the relative influence of breadth of beam and height of freeboard in lenthening out the curves of stability* (*Trans. Nav. Arch.*, vol. XII). London.

1871. **C.-W. Merrifield.** *On the limits of safety of ships as regards capsizing* (*Annual*, vol. I). London.

1872. **George Stanbury.** *On curves of buoyancy and metacentres for vertical displacements* (*Annual*, vol. II). London.

1873. **O. Duhil de Bénazé** et **P. Risbec.** *Mémoire sur le mouvement complet du navire oscillant sur eau calme* (inséré dans la 10e livr., 1874 du *Mém. G. M.*). Paris.

Au début de l'année 1873, deux Ingénieurs de la Marine, MM. Duhil de Bénazé et Risbec, présentèrent à l'Académie des Sciences un Mémoire très important sur les expériences d'oscillation qu'ils venaient d'effectuer à bord d'un petit navire du port de Brest, l'*Elorn*. L'exposé des résultats obtenus était précédé d'une théorie remarquable de la stabilité de l'équilibre des corps flottants, basée sur des considérations de Dynamique pure et sur l'emploi du potentiel de la pesanteur. La Préface de ce beau Mémoire, rédigée ultérieurement, expose l'état, à cette époque, de la question de la stabilité des corps flottants.

1873. **Th.-A. Blom.** *Practical method of finding a ship's metacentre at great angles of inclination* (*Journal of the United Serv. Inst.*). London.

1874. **George Stanbury.** *On curves of stability for vessels at light draught* (*Annual*, vol. IV). London.

1874. **Fréd. K. Barnes.** *The effect on the stability produced by a ship grounding* (*Annual*, vol. IV). London. Traduit dans le *Mém. G. M.*, 2e livr., 1875, par M. de Maupeou.

1874. **Fréd. K. Barnes.** *On the metacentre and metacentric curves* (article du *Naval Science*, vol. III). London.

1874-1875. **Fréd. K. Barnes.** *The geometrical theory of stability for ships and other floating bodies* (trois articles du *Naval Science,* vol. III et IV). London.

1875. **Villaret,** Ingénieur de la Marine. *De la stabilité transversale d'un navire pendant son échouage* (*Mém. G. M.*, 1re livr., 1875). Paris.

1875. **E. Bertin.** *Méthode nouvelle pour établir la formule de la hauteur métacentrique* (Note insérée dans la 4e livr., 1875, du *Mém. G. M.*). Paris.

1875. **J. Macfarlane Gray.** *On polar diagrams of stability* (*Trans. Nav. Arch.*, vol. XVI). London.

1877. **W. John.** *On the stability of ships* (*Trans. Nav. Arch.*, vol. XVIII). London.

1878. **W.-H. White.** *On the geometry of metacentric diagrams* (*Trans. Nav. Arch.*, vol. XIX). London.

Dans les Ouvrages généraux déjà cités de théorie du navire, tels que le Cours de M. Garnier et la *Théorie du navire* de M. Guyou, nous trouvons aussi des théories très intéressantes de la stabilité. Celle de M. Guyou avait paru isolément dès 1879 dans la *Revue maritime et coloniale.*

1880. **H. Schunke.** *Beitrag zur Theorie der Stabilität schwimmender Körper.* Kiel.

1881. **E. Selleron,** Ingénieur de la Marine. *De la stabilité des navires et de leur subdivision en compartiments étanches.* Lorient.

L'Opuscule de M. Selleron traite le point de vue spécial de la stabilité statique des navires contenant de l'eau.

1881. **H. White.** *On the stability of certain merchant ships* (*Trans. Nav. Arch.*, vol. XXII). London.

1882. **W. Denny.** *On the reduction of transverse and longitudinal metacentric curves to ratio curves* (*Trans. Nav. Arch.*, vol. XXIII). London.

1883. **V. Daymard.** *Mémoire sur de nouvelles courbes servant à représenter et à mesurer la stabilité statique des navires sous toutes les inclinaisons possibles.* Paris.

Ce Mémoire, où se trouve exposée en détail la méthode de calcul de l'Auteur pour le bras de levier de la poussée, eut un

grand retentissement en France et en Angleterre. Il parut en 1883 dans la 8e livr. du *Mém. G. M.*, et, en 1884, dans le vol. XXV des *Trans. Nav. Arch.* Il fut couronné en 1885 par l'Académie des Sciences.

1883-1884. **J.-H. Biles.** *On the stability of ships at launching* (*Transactions of the Institution of Engineers and Shipbuilders*, vol. XXVII). London.

1883-1884. **F.-P. Purvis** et **B. Kindermann.** *On approximation to curves of stability from data for known ships* (même publication, même Volume). London.

1884. **W. Denny.** *On cross-curves of stability, their uses, and a method of constructing them* (*Trans. Nav. Arch.*, vol. XXXV). London.

1884. **F. Elgar.** *The uses of stability calculations in regulating the loading of steamers* (*Trans. Nav. Arch.*, vol. XXV). London.

1884. **P. Jenkins.** *On some points of interest in connection with the construction of metacentric diagrams and the initial stability of vessels* (*Trans. Nav. Arch.*, vol. XXV). London.

1884. **L. Benjamin.** *Contributions to the solution of the problem of stability* (*Trans. Nav. Arch.*, vol. XXV). London.

1884. **L. Benjamin.** *Description of a new stability-apparatus* (*Journal of the United Service Institution*). London.

1884. **J.-C. Spence.** *The graphic calculation of the data depending on the form of ships required for determining their stability* (*Trans. Nav. Arch.*, vol. XXV). London.

1884. **J.-C. Spence.** *The stability of ships, explained simply and calculated by a new graphic method.* Newcastle.

1884. **Alex. Taylor.** *Description of A. Taylor's stability indicator for showing the initial stability and stowage of ships at any displacement* (*Trans. Nav. Arch.*, vol. XXV). London.

1885. **Edward-J. Reed.** *A treatise on the stability of ships.* London.

Dans cet Ouvrage, très développé et très complet, le célèbre constructeur anglais a réuni la plupart des documents relatifs à la stabilité, tant au point de vue de la théorie qu'à celui des

applications numériques. On y rencontre de nombreuses citations extraites des auteurs français auxquels l'Auteur a offert une généreuse hospitalité; c'est ainsi que le Mémoire de Moreau y est cité avec éloge comme le premier essai de théorie dynamique, que les méthodes de calcul de Dargnies, Reech, Risbec et Daymard s'y trouvent décrites en détail, et que le Mémoire de M. Guyou sur la stabilité y est presque entièrement reproduit.

1885-1886. **J.-H. Heck.** *A mechanical method of measuring a vessel's stability* (*Trans. Nav. Arch.*, vol. XXVI et XXVII). London.

1887. **E. Guyou** et **G. Simart.** *Développements de Géométrie du navire.* Paris.

Ce remarquable Mémoire, inséré dans le t. XXX des *Mémoires présentés par divers Savants à l'Académie des Sciences,* est l'exposé de la méthode spéciale aux auteurs pour calculer le bras de levier de la poussée.

1887. **Archibald Denny.** *On the practical application of stability calculations* (*Trans. Nav. Arch.,* vol. XXVIII). London.

1887. **John-H. Heck.** *A new method of using paper sections for the determination of cross-curves of stability* (*Trans. Nav. Arch.*, vol. XXVIII). London.

1887. **L. Benjamin.** *Stability calculations by means of the planimeter* (*Trans. Nav. Arch.*, vol. XXVIII). London.

1889. **P. Jenkins.** *On the connection between the curve of stability and the metacentric curve of locus of prometacentres* (*Trans. Nav. Arch.*, vol. XXX). London.

V. — Théorie des ondes. — Théorie de la houle. Vagues de la mer.

C'est du commencement du XIXe siècle que date la théorie analytique de la houle trochoïdale. On n'avait auparavant que des idées ou erronées ou fort incomplètes de la nature du mouvement des molécules liquides. Léonard de Vinci, dans son Traité *Del moto e misura dell' acqua,* aurait le premier expliqué la nature de la houle, distingué de la propagation générale le mouvement propre de chaque molécule et deviné les causes principales des oscillations. Newton, après avoir obtenu l'équation du mouvement oscillatoire d'un liquide dans un siphon renversé, imagina de l'appliquer au mouvement des vagues, qui résulteraient d'une oscillation

dans des canaux de forme idéale et invariable, coudés ou plutôt circulaires. Ce calcul, inexact parce qu'il suppose de simples déplacements et non pas des déformations des éléments liquides, constitua une première théorie, dite du *siphonnement*, insérée dans le célèbre Ouvrage de Newton, *Philosophiæ naturalis principia mathematica*. On ne saurait dire que cette théorie ait régné dans la Science, car on la trouve généralement adoptée avec défiance; mais du moins elle était la seule à l'époque des premières recherches sur le roulis. Euler n'a abordé l'étude des vagues dans aucun de ses Ouvrages. Daniel Bernoulli admit les idées générales de Newton, suivant lesquelles chaque particule d'eau oscille dans un tube idéal de forme invariable; il considérait, en même temps, les ondulations, dans leur ensemble, comme nécessairement analogues au mouvement des cordes vibrantes, admettant que la *figure ondoyante* de la surface a la forme d'une sinusoïde, que les vagues présentent à mi-hauteur des nœuds dont la position est invariable et que, dans l'intervalle des nœuds, les vagues vont s'élevant et s'abaissant alternativement sans se déplacer. Don Georges Juan, dans son *Examen maritime*, exposa la théorie des vagues d'une façon plus juste que ses prédécesseurs; il admit que le profil de la houle est sinusoïdal, mais il faisait pressentir que chaque molécule décrivait une orbite fermée. Laplace, le premier, en 1776, chercha à soumettre le phénomène des ondes liquides à une analyse rigoureuse, et Lagrange, dix ans plus tard, s'occupa également de la question au point de vue analytique. Mais ce n'est qu'en 1804 que F. Gerstner, savant Ingénieur autrichien, publia, à Prague, sa remarquable théorie des vagues, basée sur l'hypothèse d'une orbite circulaire décrite par chaque molécule et universellement admise aujourd'hui. Ce Mémoire fut, en 1825, inséré dans l'Ouvrage des frères Weber, que nous citons plus loin, mais il n'en resta pas moins ignoré longtemps encore dans les autres pays.

1804. **F. Gerstner.** *Theorie der Wellen.* Prague.

1809. **Brémontier.** *Recherches sur le mouvement des ondes.* Paris.

1815. **Poisson.** *Mémoire sur la théorie des ondes.* Paris.

Ce Mémoire, très important, fut lu à l'Académie les 20 octobre et 18 décembre 1815, et se trouve dans les *Mémoires de l'Académie*, 2ᵉ série, t. I, année 1816.

1815-1816. **A.-L. Cauchy.** *La théorie de la propagation des ondes à la surface d'un fluide pesant d'une profondeur indéfinie* (inséré dans les *Mémoires présentés par divers Savants à l'Académie*, 2ᵉ série, t. I, année 1827). Paris.

En 1815 et 1816, l'Académie des Sciences proposa la théorie de la propagation des ondes comme sujet du grand prix des Sciences mathématiques. Le Mémoire couronné fut celui d'Augustin Cauchy.

1820. **J. Plana.** *Notes sur la théorie des ondes donnée par M. Poisson* (*Accad. di Torino. Comptes rendus*). Torino.

1820. **Bidone.** *Expériences sur le remous et sur la propagation des ondes* (*Reale Accad. di Scienze*, vol. XXV, et *Mémoires de l'Académie de Turin*, t. XXX). Torino.

1823. **Poleni.** *Del moto misto dell' acqua.* Bologna.

1825. Les frères **E.-H.** et **W. Weber.** *Die Wellenlehre.* Leipzig.

1825. **Poisson.** *Notes sur le problème des ondes* (*Mémoires de l'Académie*, 2e série, t. VIII, année 1825). Paris.

1831. **Emy.** *Du mouvement des ondes et des travaux hydrauliques.* Paris.

1832. **M.-A. Ostrogradsky.** *Mémoire sur la propagation des ondes dans un bassin cylindrique* (*Mémoires présentés par divers Savants à l'Académie*, 2e série, t. II, année 1832).

1835. **John Scott Russell.** *Sur les lois de certains phénomènes hydrodynamiques qui accompagnent le mouvement des corps flottants.* London.

Ce Mémoire, traduit dans les *Annales des Ponts et Chaussées*, 1837, 2e semestre, marque le point de départ des recherches de Scott Russell sur le phénomène remarquable auquel il a donné le nom d'*onde de translation* ou *solitaire*.

1836. **Walker.** *Oceanic ondulations* (*Nautical Magazine*). London.

1838. **Virla.** *Du mouvement des ondes* (*Annales des Ponts et Chaussées*). Paris.

1841. **Siau.** *De l'action des vagues à de grandes profondeurs* (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences*). Paris.

1842. **Stokes.** Article sur les ondes dans les *Cambridge Transactions*. Cambridge.

1843. **A. Hue de Caligny.** *Expériences ayant pour but de concilier les hypothèses sur le mouvement intérieur des flots*, etc. (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences*). Paris.

1845. **J. Scott Russell.** *Report of the fourteenth meeting of the British Association for the advancement of Science, held at York in september* 1844. London.

Dans ce Rapport sont exposés les résultats des expériences

de l'Auteur sur l'onde de translation. *Voir* aussi sur ce sujet son grand Ouvrage déjà cité page XVII : *Modern Architecture*.

1845. **Laurent.** *Observations sur les ondes liquides*, etc. (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences*). Paris.

1845. **Earnshaw.** Article dans les *Cambridge Transactions*. Cambridge.

1845. Sir **Airy.** *On tides and waves* (*Encyclopædia Metropolitana*). London.

Cet Ouvrage important a été traduit par M. P. Guieysse dans le *Journal de Mathématiques pures et appliquées* de 1875.

1845. **A. Lang.** *Height of waves on the same voyage* (*Nautical Magazine*). London.

1845. **Wilkes.** *Narrative of the United States exploring exped.* (t. I). Philadelphie.

1846. **Walker.** *Ocean waves* (*Nautical Magazine*). London.

1847. **C. Conti.** *Del moto ondulatorio* (*Giorn. E. di Scienza*). Padova.

1848. **Anonyme.** *Observations de vagues* (*Nautical Magazine*). London.

1850. **A.-J. Robertson.** *On the theory of waves* (*Phil. Trans. Roy. Soc.*). London.

1850-1851. **Stokes.** Nouveaux articles dans les *Cambridge Transactions*. Cambridge.

1851. **Scoresby.** *On Atlantic waves, their magnitude*, etc. London.

1863. **M.-J. Macquorn-Rankine.** *On the exact form of waves near the surface of deep water* (*Phil. Trans. Roy. Soc.*). London.

1863. **Bazin.** *Mémoire sur le remous et sur la propagation des ondes* (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences*). Paris.

Les *Recherches expérimentales sur la propagation des ondes*, du même auteur, ont été insérées dans les *Mémoires présentés par divers Savants* (2e série, t. XIX, année 1865).

1866. **Cialdi.** *Sul moto ondoso del mare*. Roma.

1867. **Pâris**, père et fils. *Note sur un trace-roulis et sur un trace-vagues* (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences*). Paris.

1868. **M.-J. Macquorn-Rankine.** *On waves which travel along with ships* (*Trans. Nav. Arch.*, vol. IX). London.

Et du même, la même année :

On waves in liquids (*Phil. Trans. Roy. Soc.*; inséré aussi dans les *Trans. Nav. Arch.*, vol. XIV, 1873).

En France, en 1869, M. E. Bertin, Ingénieur de la Marine, et M. J. Boussinesq présentent à l'Académie deux Mémoires qui devaient être les débuts de deux longues séries de travaux importants.

Les travaux de M. Bertin parurent successivement dans les *Mémoires de la Société des Sciences de Cherbourg* sous les titres suivants :

Étude sur la houle et le roulis; 1869.

Complément à l'étude sur la houle et le roulis; 1871.

Données théoriques et expérimentales sur la houle et le roulis; 1874.

Données théoriques et expérimentales sur la houle et le roulis (suite); 1879.

Ces Mémoires réunis, remaniés et augmentés, formèrent plus tard les Ouvrages suivants :

1877. **L.-E. Bertin.** *Les vagues et le roulis.* Paris (Berger-Levrault).

1880. **L.-E. Bertin.** *Données théoriques et expérimentales sur les vagues et le roulis* (suite). Paris (Gauthier-Villars).

Les travaux de M. J. Boussinesq ont été insérés dans les *Mémoires présentés par divers savants à l'Académie*, sous ces titres :

1872. **J. Boussinesq.** *Théorie des ondes liquides périodiques* (2e série, t. XX, année 1872). Paris.

1877. **J. Boussinesq.** *Essai sur la théorie des eaux courantes* (2e série, t. XXIII et XXIV, année 1877). Paris.

Des Notes complémentaires du même auteur, sur le même sujet, ont depuis été insérées aux *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, passim.

En continuant, à partir de 1869, la liste des Ouvrages publiés sur les ondes liquides et les vagues, nous rencontrons :

1870. **M.-J. Macquorn-Rankine.** *On stream line surfaces* (*Trans. Nav. Arch.*, vol. XI). Paris.

1871. **Armand Pâris,** Lieutenant de vaisseau. *Observations sur l'état de la mer* (*Rev. Mme*, t. XXXI). Paris.

1873. **C.-W. Merrifield.** *Deep sea waves* (*Naval Science*, vol. II). London.

1873-1874. **C.-W. Merrifield.** *On sea waves* (*Annual*, vol. III et IV). London.

1874. **O. Duhil de Bénazé.** *Théorie de la houle* (*Rev. Mme*, t. XLII). Paris.

1875. **W.-W. Rundell.** *On a mode of obtaining the outlines of sea waves in deep water* (*Trans. Nav. Arch.*, vol. XVI). London.

1878. **J. Woolley.** *On theory of deep sea or oscillating waves* (*Trans. Nav. Arch.*, vol. XIX). London.

1879. **J. Scott Russell.** *On the true nature of the wave of translation*, etc. (*Trans. Nav. Arch.*, vol. XX). London.

1879. **Ch. Antoine,** Ingénieur de la Marine. *Des lames de haute mer*. Paris.

1881. **Comoy.** *Étude pratique sur les marées fluviales*. Paris.

1881. **James Hamilton.** *On waves raised by paddle steamers and their positions relatively to the wheels* (*Trans. Nav. Arch.*, vol. XXII). London.

1885. **J. Scott Russell.** *The wave of translation in the Oceans of water, air and ether*. Newcastle et Edinburgh.

1885. **De Saint-Venant.** *Mouvement des molécules de l'onde dite* solitaire, etc. (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences*). Paris.

1887. **J.-H. Cotterill.** *On the changes of level in the surface of the water surrounding a vessel*, etc. (*Trans. Nav. Arch.*, vol. XXVIII). London.

1888. **De Saint-Venant** et **Flamant.** *De la houle et du clapotis* (*Annales des Ponts et Chaussées*). Paris.

1889. **Flamant.** *Des ondes liquides non périodiques et en particulier de l'onde solitaire* (*Annales des Ponts et Chaussées*). Paris.

Voir aussi sur le même sujet ceux des Ouvrages du Titre VI suivant qui traitent du roulis sur houle.

VI. — Roulis en eau calme et sur houle, sans et avec résistances passives.

(*Voir* à ce sujet les Ouvrages du Titre précédent qui traitent non seulement de la houle, mais encore du roulis, et les Ouvrages généraux de Théorie du Navire cités au Titre II.)

Le roulis du navire *en eau calme* fut étudié, dès 1742, par Euler (*Scientia navalis*), puis par Jean Bernoulli (t. IV de ses Œuvres. *De oscillationibus corporum aquæ insidentium*), et par Bouguer (*Traité du Navire*); mais le roulis *sur houle* ne fut abordé qu'en 1757 par Daniel Bernoulli (Mémoire couronné par l'Académie). Ce dernier et remarquable travail était entaché de plusieurs erreurs : d'abord d'une hypothèse incorrecte sur la nature du mouvement oscillatoire des molécules liquides, ensuite de la supposition inexacte d'une poussée constamment verticale et passant par le centre de carène, comme en eau calme, puis de l'application d'un postulatum fort contestable, celui d'une même période commune pour les corps d'un même système matériel, animés de mouvements oscillatoires réguliers et permanents. Don Georges Juan (*Examen maritime*), fait intervenir dans l'étude de cette même question le moment modérateur des résistances de l'eau, mais en se basant seulement sur la proportionnalité de la résistance à la simple vitesse, ce qui n'est qu'un cas particulier du problème.

En 1859, Dupuy de Lôme fut amené, pour l'étude des projets des vaisseaux à vapeur de second rang, à reprendre et à discuter l'expression générale du couple de rappel du navire incliné sur une houle de pente donnée; mais ses hypothèses sont les mêmes que celles de Bernoulli et entachées par suite des mêmes erreurs.

1859. **Dupuy de Lôme.** *Mémoire sur les vaisseaux à vapeur de second rang* (*Mém. G. M.*, 4e livr., 1859). Paris.

Les premiers essais d'analyse du roulis sur houle, en tenant compte du mouvement orbitaire de l'eau et du mouvement oscillatoire de la normale à la houle, remontent à 1861, époque à laquelle William Froude, en Angleterre, fonda sa théorie du roulis. Mais, bien que basée sur la connaissance du mouvement réel des molécules liquides, cette théorie présente encore deux défauts : d'une part, elle admet, dans le seul but de faciliter les calculs, que le profil trochoïdal de l'onde est remplacé par un profil

sinusoïdal; de l'autre, que, sur un navire suffisamment petit par rapport à la houle, la poussée passe encore par le centre de carène; ou, en d'autres termes, que le moment des pressions de l'eau sur la carène par rapport à ce centre est nul, ou encore que le moment d'inertie de la carène liquide dont le flotteur tient la place ne doit pas entrer en ligne de compte.

1861. **William Froude.** *On the rolling of ships* (*Trans. Nav. Arch.*, vol. II, avec deux Appendices dans le vol. III). London.

La théorie de Froude a été, en Angleterre et en France, le sujet d'une ardente polémique. On la trouvera traduite dans le *Mém. M. G.*, 3e livr., 1870, et suivie, dans cette même livraison, d'une Note de M. de Fréminville, Ingénieur de la Marine.

1862. **Joseph Woolley.** *On the rolling of ships* (*Trans. Nav. Arch.*, vol. III). London.

1862. **J. Crossland.** *On M. Froude's theory of rolling* (*Trans. Nav. Arch.*, vol. III). London.

1862. **Macquorn-Rankine.** *Remarks on M. Froude's theory of the rolling of ships* (*Trans. Nav. Arch.*, vol. III). London.

Dans ce dernier Mémoire, l'Auteur modifie la théorie de Froude en rétablissant pour l'onde le profil trochoïdal.

1862. **Brun,** Ingénieur de la Marine. *Étude sur le roulis* (insérée au *Mém. G. M.*, 2e livr., 1864, et suivie dans cette livraison d'un Rapport du Conseil des travaux de la Marine). Paris.

Cette théorie complète seulement celle de Bernoulli en conservant exactement les mêmes hypothèses, mais en établissant cette fois l'équation du mouvement du navire et en ne se bornant plus à la recherche du mouvement oscillatoire synchrone à la houle de la directrice d'équilibre statique suivant laquelle il doit y avoir à chaque instant équilibre du navire placé sur la houle.

Nous placerons aussi à cette époque la théorie très complète et très originale que professait Reech à l'École du Génie maritime, car c'est vers ce temps qu'après plusieurs perfectionnements l'éminent Ingénieur l'amena à son état définitif. Reech commence par définir le mouvement orbitaire des molécules liquides, puis il corrige les hypothèses inexactes de Bernoulli sur la poussée, en ajoutant à la poussée hydrostatique deux composantes X et Z et un moment M hydrodynamiques, capables de produire autour du centre de carène le mouvement réel du liquide dont le

navire tient la place. Il intègre ensuite l'équation différentielle du mouvement obtenue dans ces conditions et en discute les résultats d'une façon très remarquable. Les critiques que l'on peut adresser à sa théorie sont : 1° que, pour la facilité du calcul, il a recours, comme Froude, au profil sinusoïdal; 2° que, dans l'établissement de l'équation du roulis, il néglige les moments des composantes X et Z et se borne au moment M, qui dès lors devient inexact.

1862. **Reech.** *Théorie du roulis et du tangage* (M. de Fréminville a rédigé, d'après les notes prises par les Élèves, un exposé de cette théorie qui est inséré au *Mém. G. M.*, 3e livr., 1870). Paris.

1863. **W. Froude.** *On isochronism of oscillation in ships,* suivi de *Remarks on the differential wave in a stratified fluid,* du même auteur (*Trans. Nav. Arch.,* vol. IV). London.

1863. **J. Scott Russell.** *On the rolling of ships as influenced by their forms and by the disposition of their weights* (*Trans. Nav. Arch.,* vol. IV). London.

1863. **W. Froude.** *Remarks on M. Scott Russell's paper on rolling* (*Trans. Nav. Arch.,* vol. IV). London.

1863. **J. Scott Russell.** *Postscript to M. Froude's remarks on rolling* (*Trans. Nav. Arch.,* vol. IV). London.

1863. **J. Woolley.** *Postscript to M. Froude's remarks on M. Scott Russell's paper on rolling* (*Trans. Nav. Arch.,* vol. IV). London.

1864. **Macquorn-Rankine.** *On the action of waves upon a ship's keel,* suivi de *On isochronous rolling of ships,* et de *On the uneasy rolling of ships.* du même auteur (*Trans. Nav. Arch.,* vol. V). *Voir* aussi *Shipbuilding theoretical and practical,* 1866, du même auteur. London.

1866. **J. Krantz,** Capitaine de frégate. *Considérations sur le roulis des bâtiments.* Paris.

1867. **Pâris,** père et fils. *Note sur un trace-roulis* (*Comptes rendus,* 8 avril 1867). Paris.

1869. **De Maupeou,** Ingénieur de la Marine. *Observations de roulis. Alidade pour mesurer le roulis* (*Mém. G. M.,* 1re livr., 1870). Paris.

1869. **C.-W. Merrifield.** *First Report of the Committee of the British Association* (traduit dans le *Mém. G. M.*, 2e livr., 1870). Exeter.

1869. **De Fréminville,** Ingénieur de la Marine. *Rapport sur le Mémoire de M. Froude relatif à la théorie du roulis* (*Mém. G. M.*, 3e liv., 1870). Paris.

1869-1871. **E. Bertin.** *Étude sur la houle et le roulis, et complément à cette étude* (*voir* Titre V). Cherbourg.

Dans son très important travail, M. Bertin établit d'abord la théorie exacte du roulis pour un flotteur très petit, puis il passe de là au cas du navire à dimensions finies, en introduisant certains facteurs correctifs.

1871. **De Saint-Venant.** *Du roulis sur mer houleuse.* Paris.

Dans ce remarquable Ouvrage, l'Auteur : 1° montre que, quelle que soit la forme supposée connue de la houle, l'équation du roulis en eau non résistante peut être intégrée; 2° donne l'intégrale relative au profil trochoïdal, et 3° tient compte analytiquement de l'effet des résistances, quand ces résistances peuvent être prises proportionnelles à la simple vitesse.

1871. **O. Duhil de Bénazé.** *Étude du roulis du navire sur mer agitée.* Brest.

Cette première étude de M. de Bénazé est une rectification de la théorie de Reech. L'auteur prend les composantes X et Z et le moment M de Reech, non seulement pour la carène droite, mais encore pour les onglets, et il fait entrer en ligne de compte les moments de X et Z par rapport au centre de gravité; enfin il signale l'opportunité d'un terme de résistance.

1872. *Report of the Committee appointed to examine the designs upon which ships of war have recently been constructed.* London.

1872. **Macquorn-Rankine.** *On the rolling of ships* (*Trans. Nav. Arch.*, vol. XIII). London.

1872. **P. Watts.** *The rolling of ships* (*Annual*). London.

1873. **W. Froude.** *Description of an instrument for automatically recording the rolling of ships* (*Trans. Nav. Arch.*, vol. XIV, et *Journal of the United Service Institution*). London.

1873. **E. Bertin.** *Note sur la résistance des carènes au roulis et sur les qualités nautiques* (insérée dans les *Mémoires des Savants étrangers*, 2e série, t. XXII; 1876, et *Mém. G. M.*, 6e livr., 1873). Paris.

1873. **O. de Bénazé** et **P. Risbec.** *Mémoire sur le mouvement complet du navire oscillant sur eau calme. Relations des expériences faites sur l'*Élorn (*Mém. G. M.*, 10e livr., 1874). Paris.

C'est dans ce beau Mémoire que les Auteurs ont donné une expression analytique de la loi du mouvement du roulis résistant en eau calme, d'après la loi graphique tracée par le navire lui-même.

1873. **O. de Bénazé.** *Application de la théorie du roulis à l'*Océan *et à l'*Armide, et *Note relative au roulis de l'*Océan (*Mém. G. M.*, 11e livr., 1874). Paris.

1873. **Mangin,** Ingénieur de la Marine. *Note sur l'expression vulgaire du nombre des oscillations par calme des bâtiments de mer* (*Mém. G. M.*, 9e livr., 1873). Paris.

1873. **Ch. Antoine,** Ingénieur de la Marine. *Du roulis par calme.* Brest.

1873. **W.-H. White.** *M. Antoine's Memoir on the still water oscillation of ships* (*Annual*). London.

1874. **Cousin,** Ingénieur de la Marine. *Observations de roulis* (*Mém. G. M.*, 12e livr., 1874). Paris.

1874. **P. Risbec.** *Note sur les observations de roulis en eau calme du* La Galissonnière (*Mém. G. M.*, 3e livr., 1875). Paris.

1874. **Huet,** Ingénieur de la Marine. *Note sur les courbes de roulis obtenues par la photographie* (*Mém. G. M.*, 4e livr., 1875). Paris.

1874. **E. Bertin.** *Données théoriques et expérimentales sur la houle et le roulis,* avec suite en 1880 (*voir* Titre V précédent). Cherbourg.

1875. **W. Froude.** *On the graphic integration of a ship's rolling, including the effect of resistance* (*Trans. Nav. Arch.*, vol. XVI). London.

1875. **O. de Bénazé.** *Calcul de la déformation d'une carène liquide.* Paris.

1876. **E. Bertin.** *Observations de roulis et de tangage exécutées avec l'oscillographe double à bord de divers bâtiments* (Mémoire inséré aux *Savants étrangers*, 2e série, t. XXVI, année 1878, et dans le *Mém. G. M.*, 3e livr., 1878). Paris.

1877. **W.-H. White.** *The behaviour of ships at sea* (*Journ. of the Unit. Serv. Inst.*). London.

1878. *Report of the Committee on the* Inflexible (traduit dans le *Mém. G. M.*, 6e et 7e livr., 1882). London.

1881. **W.-H. White.** *On the rolling of sailing ships* (*Trans. Nav. Arch.*, vol. XXII). London.

1881. **E. Bertin.** *Note sur l'expérience de roulis factice du* Mytho (*Comptes rendus* et *Mém. G. M.*, 7e livr., 1881). Paris.

1883. **P. Watts.** *On a method of reducing the rolling of ships at sea* (*Trans. Nav. Arch.*, vol. XXIV). London.

1885. **P. Watts.** *The use of waterchambers for reducing the rolling of ships at sea* (*Trans. Nav. Arch.*, vol. XXVI). London.

1886. **L. de Bussy,** Inspecteur général du Génie maritime. *Du roulis sur houle avec résistances passives* (*Comptes rendus* des 4 et 26 janvier 1886, puis *Remarques de M. Ledieu sur le sujet* et *Réponse de M. de Bussy dans les Comptes rendus* des 15 mars, 21 juin et 5 juillet 1886). Paris.

Dans sa Note, M. de Bussy expose une méthode analytique très originale d'intégration pour la loi du mouvement de roulis sur houle résistante. Cette méthode a pour point de départ la loi du roulis résistant en eau calme trouvée pour l'*Elorn* par MM. de Bénazé et Risbec.

1886. Vice-Amiral **Pâris.** *Description of an instrument intended to analyse the rolling of ships* (*Trans. Nav. Arch.*, vol. XXVII). London.

1887. **E. Bertin.** *Sur l'emploi du lest liquide pour diminuer le roulis des navires* (*Mém. G. M.*, 3e livr., 1887). Paris.

L. de Folin. *Notions théoriques des principes sur lesquels reposent les mouvements et les évolutions des navires.* Paris.

VII. — Résistance des carènes.

(*Voir* aussi plus haut les Ouvrages généraux d'Architecture navale des XVIIe et XVIIIe siècles et les *Traités complets de Théorie du Navire*.)

Newton entreprit le premier (*Philosophiæ naturalis principia mathematica*, t. I, Liv. II, prop. 38; 1687, London) de déterminer par les principes de la Mécanique la résistance éprouvée par un corps mû dans un fluide, puis, en Angleterre aussi, Fatio de Duiller s'occupa dans son Livre, *Fruit-wals improved by the inclining to the horizon* (London, 1698), de la recherche du solide de moindre résistance. Jean Bernoulli commenta les théories de Newton dans son *Discours sur les lois de la communication du mouvement* et dans son *Hydraulique* (*Johannis Bernoulli opera omnia. Genève*, 1742). Le fils de Jean Bernoulli, Daniel Bernoulli, et son célèbre élève, Léonard Euler, s'attachèrent aussi à la question de la résistance des fluides et en donnèrent chacun une théorie. Daniel Bernoulli proposa, dans le IIe Vol. des *Mémoires de Pétersbourg* (1727), une première formule de la résistance des fluides, qu'il combattit depuis dans son *Traité d'Hydrodynamique* (*Strasbourg*, 1738) et remplaça en 1741 par une nouvelle formule, celle de la pression d'une veine fluide qui rencontre un plan, dans le VIIIe Vol. des *Mémoires de Pétersbourg*; mais son auteur lui-même reconnaît que sa théorie ne saurait s'appliquer exactement au cas d'un plan entièrement plongé dans le fluide, parce que le mouvement des particules liquides est fort différent dans les deux cas. La théorie d'Euler exposée dans les *Nouveaux principes d'Artillerie* de B. Robins, avec des remarques de L. Euler (1745), traduit par Lombard (1783), est basée sur l'analogie du phénomène de la résistance avec celui de l'écoulement par des orifices; elle est plus satisfaisante que celle de Newton et conduit, pour la valeur de la résistance, sur un plan normal à la vitesse, à la moitié de ce qu'avait trouvé le philosophe anglais.

En France, on trouve sur le sujet, avant Bouguer et d'Alembert, quelques propositions de Paul Hoste dans sa *Théorie de la construction des vaisseaux*, Chap. I; 1687, et un certain nombre de travaux insérés dans les *Mémoires de l'Académie des Sciences* et dus à L'Hôpital, de La Hire, Varignon, Pitot, etc.

1699. Le Marquis **de L'Hôpital**. *Méthode facile pour trouver un solide rond, qui, étant mû dans un fluide en repos parallèlement à son axe, rencontre moins de résistance que tout autre solide*, etc. (*Mém. Ac. des Sc.*). Paris.

1702. **De la Hire**. *Examen de la force nécessaire pour faire mouvoir les bateaux* (*Mém. Ac. des Sc.*). Paris.

1707. **Varignon**. *Des mouvements faits dans les milieux résistants*, etc. (*Mém. Ac. des Sc.*). Paris.

1728. **Pitot.** *Remarques sur les rapports des surfaces des grands et des petits corps* (*Mém. Ac. des Sc.*). Paris.

1733. **P. Bouguer.** *Une base qui est exposée au choc d'un fluide étant donnée, trouver l'espèce de conoïde dont il faut la couvrir pour que l'impulsion soit la moindre qu'il est possible* (*Mém. Ac. des Sc.*). Paris.

1735. **De la Croix,** Commissaire général de la Marine. *Extrait du Méchanisme des mouvements des corps flottants* (*Mém. des Sc. et des Beaux-Arts*, avril, art. 35). Saint-Pétersbourg. Traduit en anglais, en 1775, par l'Amiral Knowles.

1744. **D'Alembert.** *Traité de l'équilibre et du mouvement des fluides.* Paris.

1746. **P. Bouguer.** *De l'impulsion des fluides sur les proues faites en pyramoïdes dont la base est un trapèze* (*Mém. Ac. des Sc.*). Paris.

1746. **Bouguer.** *Traité du navire* (Liv. III, Sect. I, Chap. II). Paris.

1747-1748. **Léonard Euler.** *Examen artificii navis a principio motûs interno propellandi* (*Mém. de l'Ac. de Saint-Pétersbourg*).

1752. **D'Alembert.** *Essai d'une nouvelle théorie de la résistance des fluides.* Paris.

1757. **De Saint-Jacques de Sylvabelle.** *Du solide de moindre résistance* (*Mémoires présentés par divers Savants*, t. III). Paris.

1760-1761. **Léonard Euler.** *Dilucidationes de resistentiâ fluidorum* (*Mém. de l'Ac. de Saint-Pétersbourg*).

1763-1766-1767. Le Chevalier **de Borda.** *Expérience sur la résistance des fluides* (1763), *Mémoire sur l'écoulement des fluides* (1766) et *Expériences sur la résistance des fluides* (1767), dans les *Mémoires de l'Académie des Sciences.* Paris.

1775. **F.-H. de Chapman.** *Traité de la construction des vaisseaux.* Stockholm.

1777. **D'Alembert, Condorcet,** l'abbé **Bossut.** *Nouvelles expériences sur la résistance des fluides* (l'abbé Bossut, rapporteur). Paris.

1778. **Léonard Euler.** *Essai d'une théorie de la résistance qu'éprouve la proue d'un vaisseau dans son mouvement* (*Mém. de l'Ac. des Sciences*). Paris.

1778. **Euler.** *Mémoire sur la résistance des fluides ayant pour but de concilier la théorie avec l'expérience* (*Histoire de l'Académie des Sciences.* Panckoucke, 1782). Paris.

1778. L'abbé **Bossut.** *Hydrodynamique.* Paris.

1778. Dr **Vince.** *Résistance de l'eau et de l'air* (*Phil. Trans. Roy. Soc.*). London.

1781. **Bezout.** *Cours de Mathématiques à l'usage des gardes du pavillon et de la Marine* (IVe Partie. *Mécanique et Applications*). Paris.

1786-1816. Le Chevalier **Dubuat.** *Principes d'Hydraulique vérifiés par un grand nombre d'expériences faites par ordre du Gouvernement* (3 Vol.). Paris.

1791. **Romme, Guill. Gerlach.** Prix de l'Académie des Sciences. *Essayer d'expliquer les expériences qui ont été faites sur la résistance des fluides,* etc. (Prix de l'Académie). Paris.

1797. **Venturi.** *Recherches expérimentales sur le principe de la communication latérale du mouvement dans les fluides.* Paris.

1801. **A. Thévenard,** Vice-Amiral. *Expériences sur la résistance des fluides, faites en* 1769 *et* 1770 (*Mémoires de l'Auteur relatifs à la Marine,* vol. IV). Paris. On trouve aussi un exposé de ces expériences par M. de Marguerie dans les *Mémoires de l'Académie de Marine.* Brest.

Les expériences faites par Thévenard, à Lorient, ont été vérifiées pendant leur exécution par les Commissaires du Gouvernement, Bezout et Borda, de l'Académie des Sciences.

1828. **A. Lechevalier.** *Mémoire sur le mouvement des fluides.* Metz.

1828. **Anonyme** et Colonel **Duchemin.** Grand prix des Sciences mathématiques de l'Académie. *Examiner dans tous ses détails le phénomène de la résistance de l'eau,* etc. (Prix de l'Académie). Paris.

1830. **Anonyme.** Grand prix des Sciences mathématiques, même question qu'en 1828 (Prix de l'Académie). Paris.

1834. **D'Aubuisson.** *Traité d'Hydraulique.* Paris.

1834. Colonel **Beaufoy.** *Nautical and hydraulic experiments.* London.

Cet Ouvrage posthume, où les résultats des expériences entreprises à Londres, de 1793 à 1798, par le Colonel Beaufoy, sont relatés en détail, a été publié par les soins et aux frais de M. Henri Beaufoy, fils de l'auteur.

1834. **J. Mac Neill.** *Sur la résistance de l'eau à la marche des bateaux* (*Annales de Physique et de Chimie*, 2e sem.; 1834). Paris.

1834. **P.-H. Barlow.** *Mémoire sur la résistance de l'eau* (inséré dans les *Phil. Trans. Roy. Soc.*) London.

1836. **Navier.** *Leçons sur le mouvement et la résistance des fluides.* Paris.

1838. **G. Piobert, A.-J. Morin, J. Didion,** Colonel **Duchemin.** Grand prix des Sciences mathématiques, même question qu'en 1828 (Prix de l'Académie). Paris.

1839. **J.-V. Poncelet.** *Introduction à la Mécanique industrielle.* Paris.

1842. Colonel **Duchemin.** *Recherches expérimentales sur les lois de la résistance des fluides.* Paris.

1852. **Reech.** *Traité de Mécanique* (IIe Partie, Sect. II, *Dynamique des corps à volumes finis.* et Sect. V, *Du théorème de Newton*). Paris.

1855. **Arth. Morin.** *Notions fondamentales de Mécanique.* Paris.

1856. **W. Bland.** *Hints on the principles which should regulate the form of ships and boats.* London.

1857. **Bourgois,** Capitaine de frégate. *Mémoire sur la résistance de l'eau au mouvement des corps.* Paris.

1860. **Joseph Maudslay.** *On an improvement in the form of ships* (*Trans. Nav. Arch.*, vol. I). London.

1860-1861. **John Scott Russell.** *On the wave-line principle of ship construction* (*Trans Nav. Arch.*, vol. I et II). London.

1867. **W.-E. Seccombe.** *On the impact of water against a ship*

and on its direction and pressure (*Trans. Nav. Arch.*, vol. VIII). London.

1869. **John I. Thornycroft.** *On the resistance opposed by water to the motion of vessels of various forms and the way in which this varies with velocity* (*Trans. Nav. Arch.*, vol. X). London.

1869. **C.-W. Merrifield,** rapporteur. *First Report of the Committee of the British Association* (traduit dans le *Mém. G. M.*, 3e livr., 1870). Exeter.

1870. **J.-A. Normand.** *Formules approximatives de construction navale.* Paris.

1870. **C.-W. Merrifield.** *The experiments recently proposed on the resistance of ships* (*Trans. Nav. Arch.*, vol. XI). London.

1870. **W.-J. Macquorn-Rankine.** *On stream-line surfaces* (*Trans. Nav. Arch.*, vol. XI). London.

1871. **Henry Ransford.** *On a vessel in motion and what becomes of the water she disturbs* (*Trans. Nav. Arch.*, vol. XII). London.

1872. **W. Froude.** *Expériences sur la résistance de l'eau contre les surfaces en mouvement* (Mémoire traduit dans le *Mém. G. M.*, 2e livr., 1875) (*voir* aussi sur ces expériences et sur des expériences de résistance au roulis, faites par le même, deux articles anonymes du *Naval Science* : *M. Froude's experiments on resistance and rolling*, vol. I, 1872, et *M. Froude's Admiralty experiments upon surface friction*, vol. IV, 1875). London.

1872. **W. Froude.** *On the influence of resistance upon the rolling of ships* (*Naval Science*, vol. I, 1872). London.

1872-1873. **E. Bertin.** *Note sur la résistance des carènes dans le roulis des navires et sur les qualités nautiques* (*Savants étrangers*, t. XXII, 1876, et *Mém. G. M.*, 6e livr., 1873).

1873. **Anonyme.** *On the comparative resistances of ships and models* (*Annual*, vol. III). London.

1873. **Joëssel,** Ingénieur de la Marine. *Rapport sur des expériences relatives aux gouvernails* (*Mém. G. M.*, 9e livr., 1873). Paris.

1873. **W. Froude.** *Expériences entreprises pour déterminer la résistance d'un navire de grandeur naturelle à diverses vitesses, d'après les essais exécutés sur le* Greyhound (traduit dans le *Mém. G. M.*, 4ᵉ livr., 1875) (*voir* aussi sur le sujet un article du *Naval Science : M. Froude's resistance experiments on H. M. S.* Greyhound., vol. III, 1874). London.

1874. **W. Froude.** *On stream-lines* (*Naval Science*, vol. III, 1874). London.

1875. **Anonyme.** *Admiralty experiments upon forms of ships and upon rocket floats, conducted by M. Froude* (*Naval Science*, vol. IV, 1875). London.

1876. **Kirchner.** *Ueber die Bewegungswiderstände des Schiffes.* Berlin.

1876. **W. Froude.** *On the comparative resistances of long ships of several types* (*Trans. Nav. Arch.*, vol. XVII, et *Mém. G. M.*, 7ᵉ livr., 1876). London.

1876. **B.-J. Tideman.** *Verslag van proeven, genomen met een Enkel Scheepsmodel, ten doel hebbende eenige gegevens te verkrijgen, Omtrent den Wederstand van het water tegen de Beweging van een ship.* Amsterdam.

1877. **Dislère,** Ingénieur de la Marine. *Exposé sommaire des expériences faites à Amsterdam sur la résistance des carènes* (*Mém. G. M.*, 6ᵉ livr., 1877). Paris.

1877. **W. Froude.** *On experiments upon the effect produced on the wave-making resistance of ships by length of parallel middle body* (*Trans. Nav. Arch.*, vol. XVIII). London.

1879. **Risbec,** Ingénieur de la Marine. *Études sur la résistance des carènes dans le mouvement rectiligne horizontal,* et *Note relative à la similitude au point de vue mécanique* (*Mém. G. M.*, 4ᵉ livr., 1879). Paris.

1879. **Robert Griffith.** *On the resistance given to screwships by the action of the screwpropeller and how to remedy it* (*Trans. Nav. Arch.*, vol. XX). London.

1880. **E. Rauchfuss.** *Ueber den Schiffswiderstand.* Berlin.

1880. **A.-C. Kirk.** *On a method of analysing the forms of ships*

and determining the mean angle of entrance (*Trans. Nav. Arch.*, vol. XXI). London.

1880. **J. Scott Russell.** *On a wave-line form of midship section* (*Trans. Nav. Arch.*, vol. XXI). London.

1881. **R.-E. Froude.** *On the leading phenomena of the wave-making resistance of ships* (*Trans. Nav. Arch.*, vol. XXII; traduit dans le *Mém. G. M.*, 1re livr., 1887). London.

1881. **J.-H. Biles.** *On some results deduced from curves of resistance* (*Trans. Nav. Arch.*, vol. XXII). London.

1882. **Dupré,** Ingénieur de la Marine. *Étude sur le travail de propulsion des navires à hélice en fonction de la vitesse* (*Mém. G. M.*, 1re livr., 1882). Paris.

1882. **W. Riehn.** *Die Berechnung des Schiffswiderstandes.* Hannover.

1883. **A. Dudebout,** Ingénieur de la Marine. *Note sur les expériences de résistance de carènes, exécutées au port de Brest sur des modèles de l'*Océan *et du* Bayard (*Mém. G. M.*, 3e livr., 1883). Paris.

1883. **F. Moreaux.** *Recherche du meilleur mode de navigation sur le Rhône.* Paris.

1884. **Blochmann.** *Schiffswiderstand.* Dresden.

1885. **Ledieu.** *Notes diverses sur les constructions navales.* Paris.

1885. **A. Dudebout.** *Note au sujet des essais de résistance de carènes entrepris à Brest sur des modèles au* $\frac{1}{16}$ *des torpilleurs,* et *Rapport au sujet d'une mission en Angleterre et en Hollande relative aux études de résistance de carènes entreprises dans ces pays* (*Mém. G. M.*, 3e livr., 1886). Paris.

1886. **Carl Busley,** Ingénieur de la Marine allemande. *Die Schiffsmaschine.* Kiel.

1887. **R.-H. Thurston.** *On the forms of fish and of ships* (*Trans. Nav. Arch.*, vol. XXVIII). London.

1888. **J.-A. Normand.** *On the fineness of vessels in relation to size and speed* (*Trans. Nav. Arch.*, vol. XXIX). London.

1889. **R.-E. Froude.** *On the part played in the operations of propulsion by differences in fluid pressure* (*Trans. Nav. Arch.*, vol. XXX). London.

1889. **Callou,** Ingénieur de la Marine. *Rapport de mission en Angleterre et en Hollande* (*Mém. G. M.*, 4e livr., 1889). Paris.

1889. **Resal.** *Traité de Mécanique générale*, t. VII. Paris.

VIII. — Mouvement curviligne horizontal du navire. — Gouvernail.

1863. **N. Barnaby.** *On the steering of ships* (*Trans. Nav. Arch.*, vol. IV). London.

1864. **Godron,** Ingénieur de la Marine. *Note sur les gouvernails* (*Mém. G. M.*, 7e et 8e livr., 1864). Paris.

1864. **J.-R. Napier.** *On the steering power of ships* (*Trans. Nav. Arch.*, vol. V). London.

1864. **F.-K. Barnes.** *On the relation between the power applied at the steering wheel and the effect of the rudder to turn the ships* (*Trans. Nav. Arch.*, vol. V). London.

1865. **Dupuy de Lôme.** *Note sur les causes de l'absence de précision dans la manière dont gouverne la batterie flottante l'*Implacable (*Mém. G. M.*, 1re livr., 1870). Paris.

1865. **F. Martin.** *On a practical method of measuring the circle described by a ship* (*Trans. Nav. Arch.*, vol. VI). London.

1868. **Joëssel,** Ingénieur de la Marine. *Rapport sur des expériences relatives à des gouvernails à plusieurs lames parallèles* (*Mém. G. M.*, 1re livr., 1870). Paris.

1868. **Anonyme.** *Des gouvernails. Rapport sur l'Exposition universelle de* 1867 (*Rev. Mar.*, vol. XXIII, année 1868). Paris

1869. **Bourgois,** Vice-Amiral. *Théorie du gouvernail* (*Rev. Mar.*, vol. XXV, XXVI et XXVII, année 1869). Paris.

1872. **A. Mottez,** Capitaine de vaisseau. *Examen pratique de questions de théorie du navire.* Paris.

1873. **Joëssel.** *Rapport sur des expériences relatives aux gouvernails* (*Mém. G. M.*, 9e livr., 1873). Paris.

1873. **V. Lutschaunig.** *Remarks on the theory of the rudder* (*Trans. Nav. Arch.*, vol. XIV, et *Rev. Mar.*, vol. XXXVIII, année 1873). London et Paris.

1873. **G. Stanbury.** *On the steering of ships* (*Annual*, vol. III). London.

1873. **Risbec.** *Gouvernails compensés* (*Rev. Mar.*, vol. XXXVI, année 1873). Paris.

1873. **C. Scultety.** *Recherches sur la facilité qu'a un bâtiment d'obéir à son gouvernail* (*Archiv für Seewesen* et *Rev. Mar.*, vol. XXXVI, année 1873). Trieste et Paris.

1875. **E. Weyl,** Lieutenant de vaisseau. *Effet causé sur le pouvoir du gouvernail quand on stoppe, d'après l'*Engineer (*Rev. Mar.*, vol. XLVI, année 1875). Paris.

1875. **Risbec.** *Méthode pour relever le mouvement complet* (*géométrique et cinématique*) *du navire évoluant sur mer calme* (*Mém. G. M.*, 3e livr., 1876). Paris.

1875. **Schvérer,** Capitaine de vaisseau. *Procédé pour déterminer les courbes d'évolution* (*Rev. Mar.*, vol. XLVII, année 1875). Paris.

1876. **De Sandfort,** Ingénieur de la Marine. *Sur les gouvernails,* analyse d'un article anglais. (*Rev. Mar.*, vol. L, année 1876). Paris.

1876. **A. Trêve,** Capitaine de vaisseau. *Note sur un procédé pour déterminer les courbes de giration* (*Rev. Mar.*, vol. L, année 1876). Paris.

1877. **Godron,** Ingénieur de la Marine. *Note sur la compensation des gouvernails* (*Mém. G. M.*, 5e livr., 1877). Paris.

1878. **Robert Clark.** *On an easy and effective method of ascertaining the rudder-power of steam ships* (*Trans. Nav. Arch.*, vol. XIX). London.

1879. **W.-H. White.** *On the turning power of ships* (*Journal of the United Service Institution*). London.

1880. **Ph. Hedde,** Lieutenant de vaisseau. *Analyse d'une Conférence de M.* V.-H. White *au Royal United Service Institution sur le pouvoir giratoire des navires* (*Rev. Mar.*, vol. LXV, année 1880). Paris.

1880. **P. Vivier**, Lieutenant de vaisseau. *Considérations sur la méthode Schvérer pour l'étude des courbes d'évolution* (*Rev. Mar.*, vol. LXVII, année 1880). Paris.

1883. **Siegel**, Officier de la Marine allemande. *L'angle de dérive des navires. Étude de la courbe de giration* (*Marine Verordnungs-Blatt*, n° 42, et *Rev. Mar.*, vol. LXXVIII, année 1883). Kiel et Paris.

1883. **P.-H. Colomb**. *Puissance d'évolution des bâtiments* (*Journal of the Royal United Service Institution*, t. XXVI, n° **116**, et *Rev. Mar.*, vol. LXXVIII, année 1883). London et Paris.

1886. Capitaine **P.-H. Colomb**. *Recent measurements of turning powers of screw ships* (*Trans. Nav. Arch.*, vol. XXVII). London.

1888. **Thibaudier**, Ingénieur de la Marine. *Note sur le moment résistant d'un gouvernail; expériences dynamométriques* (*Mém. G. M.*, 6e livr., 1888). Paris.

IX. — Propulsion du navire. — Théorie des propulseurs.

1753. **Daniel Bernoulli, Mathon de la Cour, Pereyre, Léonard Euler**. *La manière la plus avantageuse de suppléer à l'action du vent sur les vaisseaux, soit en y appliquant les rames, soit en employant quelque autre moyen que ce puisse être* (Sujet de prix proposé, en 1753, par l'Académie). (Prix de l'Académie des Sciences). Paris.

1773. **Léonard Euler**. *Mémoire sur l'action des rames, faisant suite à la Théorie complète de la construction et de la manœuvre des vaisseaux*. Saint-Pétersbourg (1773) et Paris (1776).

1823. **Delisle**, Capitaine du Génie militaire. *Mémoire sur l'hélice* (ce Mémoire, complété en 1825, a été inséré au *Mém. G. M.*, 8e livr., 1862). Paris.

1824. **Marestier**, Ingénieur de la Marine. *Mémoire sur les bateaux à vapeur des États-Unis*, contenant la *Théorie des roues à aubes*. Paris.

1827. **Th. Tredgold**. *Traité des machines à vapeur* (traduit en français, en 1828, par F.-N. Mellet). London et Paris.

La première théorie analytique des propulseurs hélicoïdaux est due à un Français, M. A. Taurines, qui la publia dans la Partie non officielle des *Annales maritimes*, année 1842. L'auteur, alors Professeur à l'École d'Artillerie navale de Brest, l'accompagnait d'une première étude de ces dynamomètres de rotation et de poussée qui, depuis, l'ont rendu universellement célèbre et pour lesquels le prix Plumey de l'année 1872 lui fut décerné par l'Académie des Sciences.

1842. **A. Taurines.** *Théorie de la vis d'Archimède et des autres surfaces tournantes propres à produire une impulsion suivant leur axe de rotation* (*Annales maritimes*). Paris.

1842. **Henry Booth.** *The theory and practice of propelling through water.* Liverpool.

1842. **Léon du Parc,** Capitaine de corvette. *De la vis et autres propelleurs* (inséré aussi dans les *Annales maritimes*). Paris.

1843. **Elijah Galloway.** Appendice au *Traité des machines à vapeur* de Tredgold (traduit *in extenso* dans l'Ouvrage suivant de M. Labrousse). London.

1843. **H. Labrousse,** Officier de marine. *Des propulseurs sous-marins.* Paris.

1845. **Bourgois,** Enseigne de vaisseau. *Recherches théoriques et expérimentales sur les propulseurs hélicoïdes.* Paris.

1847. Le baron **A. Séguier.** *Perfectionnements dans la navigation à vapeur* (*Comptes rendus,* t. XXV). Paris.

1850. **Moll** et **Bourgois.** *Expériences sur les propulseurs hélicoïdes faites à bord du* Pélican *en* 1847, 1848 *et* 1849, avec Rapport de l'Académie des Sciences au sujet de ces expériences (*Mém. G. M.*, 5e livr., 1850). Paris.

1851. **Bourgois,** Lieutenant de vaisseau. *Études sur l'application de l'hélice à la Marine militaire* (inséré aussi dans les *Nouvelles Annales de la Marine et des Colonies*). Paris.

1852. **John Bourne.** *A treatise on the screw propeller.* London.

1855. **E. Paris,** Capitaine de vaisseau. *Traité de l'hélice propulsive.* Paris.

1856. **E. Lahure.** *Considérations sur la construction et la propulsion des navires en fer.* Paris.

1856\. **C.-A. Holm.** *Guide pratique pour l'application du propulseur à turbine hélicoïde aux navires.* Paris.

1856\. **George Rennie.** *Account of experiments made in the year* 1856 *on the resistance experienced by screw propellers when driven at high velocities and immersed in the river Thames at different depths* (*The Artisan,* vol. XIV, livr. de septembre 1856). London.

1858\. **A. Taurines.** *Expériences dynamométriques faites de* 1848 *à* 1856 *sur un canot à vapeur* (*Mém. G. M.*, 1re livr., 1859). Paris.

1860\. **Jaÿ,** Ingénieur de la Marine. *Expériences faites avec les dynamomètres Taurines sur le* Primauguet (*Mém. G. M.*, 9e livr., 1860). Paris.

1860\. **De Laronce,** Enseigne de vaisseau. *Expériences sur le mouvement alternatif de rotation communiqué aux propulseurs marins.* Brest.

1862\. **J. Simon Holland.** *On the propulsion of steam vessels* (*Trans. Nav. Arch.*, vol. III). London.

1862\. **Guède** et **Jay,** Ingénieurs de la Marine. *Expériences dynamométriques de l'*Elorn (*Mém. G. M.*, 1re, 2e et 3e livr., 1862). Paris.

1865\. **Macquorn-Rankine.** *On the mechanical principles of the action of propellers* (*Trans. Nav. Arch.*, vol. VI), suivi d'une Note de M. Froude sur le sujet. London.

1867\. **John Bourne.** *A treatise on the screw propeller* (édition considérablement augmentée). London.

1867\. **Macquorn-Rankine.** *Some remarks on apparent negative slip* (*Trans. Nav. Arch.*, vol. VIII), suivi d'une Étude de W. Froude sur le même sujet. London.

1867\. **Arth. Rigg.** *On the relations of the screw to its reverse currents* (*Trans. Nav. Arch.*, vol. VIII), suivi d'une Note de Macq.-Rankine. London.

1867\. **G. Elliott.** *The hydraulic propeller as a motive power for ships* (*Journal of the United Serv. Inst.*). London.

1868\. **Arth. Rigg.** *On the reverse currents and slip of screw propellers* (*Trans. Nav. Arch.*, vol. IX). London.

1868. **Anonyme.** *Des propulseurs hydrauliques. Rapport sur l'Exposition universelle de* 1867 (*Rev. Mar.*, vol. XXIII, année 1868). Paris.

1869. **N.-P. Burgh.** *A practical treatise on modern screw propulsion.* London.

1869. **Anonyme.** *Désavantages des hélices jumelles* (Article du *Mechanic's Magazine* et *Rev. Mar.*, vol. XXVI, année 1869). London et Paris.

1869. **B. Savy,** Lieutenant de vaisseau. *Solidité et utilisation de l'hélice* (*Rev. Mar.*, vol. XXV, année 1869). Paris.

1871. **A. Murray.** *On the turbine propeller* (*Journal of the United Serv. Inst.*). London.

1872. **James H. Cotterill.** *On the fundamental principle of the action of a propeller* (*Annual*, vol. II). London.

1872. **W.-R. Eckart.** *On marine propulsion* [*Relation des expériences dynamométriques faites en* 1870 *à l'arsenal de Mare Island* (*California*), par M. Isherwood] (*Trans. Nav. Arch.*, vol XIII) (*voir* aussi *The Engineer* et *Rev. Mar.*, vol. XLVI et XLIX, années 1875 et 1876). London et Paris.

1873. **W. Froude.** *Des effets d'une propulsion très rapide sur le tirant d'eau des corps flottants* (*Rev. Mar.*, vol. XXXVIII, année 1873) (*voir* aussi à ce sujet un article : *The possibility of conducting*, etc., de l'*Annual*, vol. III, et le Rapport : *Admiralty experiments*, etc., de Froude dans le *Naval Science*, vol. IV, 1875). Paris et London.

1873. **Osborne Reynolds.** *De l'accélération accidentelle des hélices, théorie et expérience* (*Iron* et *Rev. Mar.*, vol. XXXVIII, année 1873). London et Paris.

1873. **James H. Cotterill.** *On the theory of the screw propeller* (*Annual*, vol. III). London.

1874. **B. Brin,** Directeur des constructions navales en Italie. *De l'utilisation des propulseurs à réaction* (*Rev. Mar.*, vol. XLII, année 1874). Paris.

1874. **Rob. Griffiths.** *On screw propulsion and screw ships* (*Trans. Nav. Arch.*, vol. XV). London.

1874. **Osborne Reynolds.** *On the effect of immersion of screw propellers* (*Trans. Nav. Arch.*, vol. XV). London.

1875. **O. de Bénazé.** *Note sur des expériences faites dans le but de connaître l'effet produit sur l'utilisation de l'hélice par une voûte en tôle située immédiatement au-dessus de celle-ci* (*Mém. G. M.*, 12e livr., 1875). Paris.

1875. **P. Risbec.** *Note sur les résultats comparatifs de quelques hélices* (*Mém. G. M.*, 5e livr., 1875). Paris.

1875. **Hamilton W. Pendred.** *On some performances of the screw propeller* (*Trans. Nav. Arch.*, vol. XVII). London.

1876. **Anonyme.** *Sur les propulseurs marins* (article de l'*Engineer* et *Rev. Mar.*, vol. XLIX, année 1876). Paris.

1877. **Anonyme.** *Perfectionnements possibles des propulseurs* (*Engineer* et *Rev. Mar.*, vol. LIII, année 1877). Paris.

1877. **James Howden.** *On the action of screw propellers* (*Trans. Nav. Arch.*, vol. XVIII). London.

1878. **W. Froude.** *Nouveau dynamomètre marin pour mesurer le travail transmis à l'arbre de l'hélice* (*Institution of mechanical Engineers* et *Rev. Mar.*, vol. LVII, année 1878). Paris.

1878. **W.-H. White.** *On the comparative efficiency of single and twin screw propellers in deep-draught ships* (*Trans. Nav. Arch.*, vol. XIX, et *Rev. Mar.*, vol. LXI, année 1879). London et Paris.

1878. **W. Froude.** *On the elementary relation of pitch, slip and propulsive efficiency* (*Trans. Nav. Arch.*, vol. XIX, et *Mém. G. M.*, 2e livr., 1888). London et Paris.

1879. **Arth. J. Maginnis.** *On a few year's experiences with the screw propeller* (*Trans. Nav. Arch.*, vol. XX). London.

1879. **Rob. Griffiths.** *On the resistance given to screw ships by the action of the screw propeller* (*Trans. Nav. Arch.*, vol. XX, et *Rev. Mar.*, vol. LXI et LXIII, année 1879). London et Paris.

1879. **Rob. Griffiths.** *On the form of the stern and the arrangements of the propellers in screw-ships* (*Journ. of the United Serv. Inst.*). London.

1880. **Ch. Antoine,** Ingénieur de la Marine. *Calculs des propulseurs hélicoïdaux* (inséré aussi dans la *Rev. Mar.,* vol. LXV et LXVII, année 1880). Paris.

1880. **Aug. Charles.** *Propulseurs sous-marins. Étude théorique et pratique des hélices.* Paris.

1881. **Dupré,** Ingénieur de la Marine. *Étude sur le travail de propulsion des navires à hélice en fonction de la vitesse* (*Mém. G. M.,* 1re livr., 1882). Paris.

1881. **Durocher du Quengo,** Lieutenant de vaisseau. *Recherches analytiques sur l'effet de la courbure de la génératrice et de la directrice dans le travail des hélices* (*Rev. Mar.,* vol. LXXIX, année 1881). Paris.

1882. **L. Vidal,** lieutenant de vaisseau. *Centre de gravité et moment d'inertie de la surface hélicoïdale* (*Rev. Mar.,* vol. LXII, année 1882). Paris.

1883. **Buonaccorsi di Pistoja.** *Die Schiffsschraube* (extrait du *Zeitschrift des œsterreichischen Ingenieur- und Architekten-Vereins*). Wien.

1883. **J.-I. Thornycroft.** *Efficiency of guide blade propellers* (*Trans. Nav. Arch.,* vol. XXIV). London.

1883. **R.-E. Froude.** *A description of a method of investigation of screw propeller efficiency* (*Trans. Nav. Arch.,* vol. XXIV, et *Mém. G. M.,* 3e livr., 1886). *Voir* aussi une étude sur le même sujet dans le *Rapport au sujet d'une mission,* etc., de A. Dudebout (*Mém. G. M.,* même livr.). London et Paris.

1883. **W. Bury.** *The resistance and the proportions of screw-propellers.* London.

1884. **A. Taurines.** *Études sur les machines à vapeur* (Ouvrage couronné par l'Académie des Sciences en 1883). Paris.

1885. **Sydney W. Barnaby.** *Marine propellers.* London.

1885. **Ledieu.** *Comparaison des navires au point de vue propulsif* (*Rev. Mar.,* vol. LXXXVI, année 1885). Paris.

1885. **Huin,** Ingénieur de la Marine. *Du sens de rotation le plus favorable aux hélices jumelles* (*Mém. G. M.,* 3e livr., 1887). Paris.

1885. **Anonyme.** *Nouvelle disposition proposée pour les hélices jumelles* (*Journal de la Marine* et *Rev. Mar.*, vol. LXXXVI, année 1885). Paris.

1885. **E.-A. Linnington.** *Propelling machinery for high speed ships* (*Trans. Nav. Arch.*, vol. XXVI). London.

1886. **Marchal**, Ingénieur de la Marine. *Experience in propulsion with three screws* (*Trans. Nav. Arch.*, vol. XXVII). London.

1886. **R.-E. Froude.** *The determination of the most suitable dimensions for screw propellers* (*Trans. Nav. Arch.*, vol. XXVII, et *Mém. G. M.*, 2e livr., 1888). London et Paris.

1886. **Carl Busley**, Ingénieur de la Marine allemande. *Die Schiffsmaschine.* Kiel.

1887. **A. Bienaymé.** *Les Machines marines.* Cours professé à l'École d'application du Génie maritime. Paris, Bernard et Cie.

1888. **A.-G. Greenhill.** *A theory of the screw propeller* (*Trans. Nav. Arch.*, vol. XXIX). London.

1888. **J.-B. Andrea.** *Communication of the results of experiments with four and two-bladed screw propellers* (*Trans. Nav. Arch.*, vol. XXIX). London.

1888. **Doyère**, Ingénieur de la Marine. *Notes sur l'application de la théorie du plan mince en mouvement dans l'eau à la comparaison de deux propulseurs hélicoïdaux*, suivies de remarques par A. Dudebout, et d'une Note (*Mém. G. M.*, 3e livr., 1888). Paris.

1889. **Doyère.** *Seconde Note sur les propulseurs hélicoïdaux* (*Mém. G. M.*, 3e livr., 1889). Paris.

1889. **R.-E. Froude.** *Remarks on Prof. Greenhill's theory of the screw propeller* (*Trans. Nav. Arch.*, vol. XXX). London.

ARCHITECTURE NAVALE.

THÉORIE DU NAVIRE.

TOME I.

PREMIÈRE PARTIE.

CALCUL DES ÉLÉMENTS GÉOMÉTRIQUES DES CARÈNES DROITES ET INCLINÉES.

1.

La pression qu'un liquide en repos exerce sur un corps fermé, immergé dans ce liquide, dépend du volume compris à l'intérieur du corps fermé; le point d'application de cette pression dépend en outre de la forme extérieure de la surface qui limite le volume du corps fermé.

L'étude mécanique du navire est ainsi intimement liée à la connaissance des formes de sa partie immergée, ou *carène*. Pour une carène de forme analytiquement déterminée, c'est-à-dire dont la surface extérieure serait représentée en coordonnées rectangulaires par une équation $z = f(x, y)$, le volume de carène et les coordonnées du centre de ce volume seraient fournis par des intégrales définies ou, autrement dit, par des expressions algébriques dans lesquelles n'entreraient que les limites inférieures, a, b, et supérieures, a', b', des variables indépendantes x et y, entre lesquelles la projection de la surface extérieure de la carène se trouverait comprise. Mais les carènes employées dans la pratique n'ont point une surface analytique; on les représente d'habitude par des sections planes parallèles à certains plans judicieusement

choisis, ou par une table des coordonnées de ces sections. Ce sont à proprement parler des surfaces topographiques ou tabulaires, pour lesquelles il est indispensable, avant d'aborder le problème mécanique, de savoir calculer, au moins approximativement, le volume et les coordonnées du centre du volume. Nous allons donc tout d'abord passer en revue les formules algébriques dont nous aurions besoin si la surface de carène était définie analytiquement; puis, rechercher des formules similaires fournissant, avec la plus grande approximation possible et au moyen des coordonnées d'un nombre limité de points de la surface, les fonctions Volume et Coordonnées du centre du volume pour des surfaces topographiques ou tabulaires.



CHAPITRE I.

FORMULES EN USAGE DANS LA THÉORIE DU NAVIRE.

2. Courbe plane en coordonnées rectangulaires : $y=f(x)$.

A, *aire de la courbe :* Quels que soient le contour fermé que représente l'équation $y=f(x)$ et la position des axes de coordonnées, on peut toujours, par une série de décompositions, ramener le problème au cas simple où l'aire est comprise entre l'axe des x, deux ordonnées et une portion de courbe. On a alors

$$A=\int_{x_0}^{x_1} y\,dx;$$

M_{ox}, *moment de l'aire* A *par rapport à l'axe des* x,

$$M_{ox}=\int_{x_0}^{x_1}\frac{y^2}{2}\,dx;$$

M_{oy}, *moment de l'aire* A *par rapport à l'axe des* y,

$$M_{oy}=\int_{x_0}^{x_1} xy\,dx;$$

I_{ox}, *moment d'inertie de l'aire* A *par rapport à l'axe des* x,

$$I_{ox}=\int_{x_0}^{x_1}\frac{y^3}{3}\,dx;$$

I_{oy}, *moment d'inertie de l'aire* A *par rapport à l'axe des* y,

$$I_{oy}=\int_{x_0}^{x_1} x^2 y\,dx;$$

I_o, *moment d'inertie polaire de l'aire* A *par rapport à l'ori-*

gine des coordonnées,

$$I_0 = \int_0^y \int_{x_0}^{x_1} (x^2 + y^2)\,dx\,dy = \int_{x_0}^{x_1} x^2 y\,dx + \int_{x_0}^{x_1} \frac{y^3}{3}\,dx = I_{ox} + I_{oy};$$

P_{oxy}, *moment produit d'inertie de l'aire* A *par rapport aux axes de coordonnées,* Ox *et* Oy,

$$P_{oxy} = \int_{x_0}^{x_1} \frac{y^2}{2} x\,dx.$$

3. Courbe plane en coordonnées polaires : $\rho = f(\omega)$.

A′, *aire de la courbe,* entre deux azimuts ω_0 et ω_1,

$$A' = \int_{\omega_0}^{\omega_1} \frac{\rho^2}{2}\,d\omega;$$

I'_0, *moment d'inertie polaire par rapport à l'origine,*

$$I'_0 = \int_{\omega_0}^{\omega_1} \frac{\rho^4}{4}\,d\omega.$$

4. Surface gauche : $z = f(x, y)$.

Q, *volume du solide :* Comme en Géométrie plane, quelle que soit la surface $z = f(x, y)$, on peut toujours, par une série de décompositions, ramener le problème au cas simple où le solide est limité au plan des xy, à une portion de la surface et à quatre plans parallèles à ceux des xz et des yz.

On a alors

$$Q = \int_{x_0}^{x_1} \int_{y_0}^{y_1} z\,dx\,dy;$$

M_{oxy}, *moment du volume* Q *par rapport au plan des* xy,

$$M_{oxy} = \int_{x_0}^{x_1} \int_{y_0}^{y_1} \frac{z^2}{2}\,dx\,dy;$$

M_{oyz}, *moment du volume* Q *par rapport au plan des* yz,

$$M_{oyz} = \int_{x_0}^{x_1} \int_{y_0}^{y_1} zx\,dx\,dy;$$

M_{ozx}, *moment du volume* Q *par rapport au plan des* zx,

$$M_{ozx} = \int_{x_0}^{x_1} \int_{y_0}^{y_1} zy\, dx\, dy.$$

S, *aire de la surface gauche :* Désignons par θ l'angle, fonction des coordonnées de la surface, de la normale à la surface avec l'axe Oz; on aura

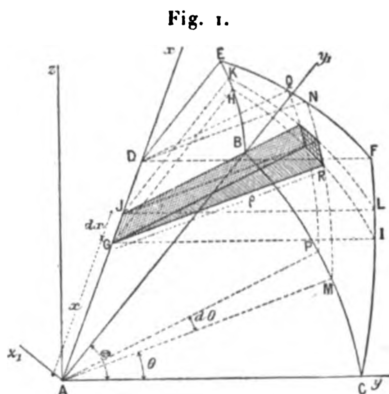
$$S = \int_{x_0}^{x_1} \int_{y_0}^{y_1} \frac{dx\, dy}{\cos\theta},$$

car $dx\, dy = ds \cos\theta$.

O, *volume d'un onglet* limité par deux plans perpendiculaires à l'arête et par une portion de la surface $z = f(x, y)$.

Le volume O est compris entre la surface donnée, deux plans ABED et ACFD (*fig.* 1) se coupant suivant l'arête AD, appelés *feuillets extrêmes,* et deux autres plans ABC, DEF perpendiculaires à l'arête, appelés *sections extrêmes.* Pour évaluer facilement le volume O, coupons-le par une série de feuillets et de sections intermédiaires aux feuillets et sections extrêmes. Soit Θ l'angle des deux feuillets extrêmes; un feuillet quelconque AMND sera défini par son angle θ avec le feuillet extrême origine des angles, et une section quelconque GHI par sa distance x à la section extrême origine des abscisses.

Fig. 1.



Le feuillet θ et la section x se coupent suivant un rayon vecteur GR de longueur ρ. On a donc

$$O = \int_0^X dx \int_0^\Theta \frac{\rho^2}{2}\, d\theta$$

ou, en renversant l'ordre des intégrations,

$$O = \int_0^\Theta d\theta \int_0^X \frac{\rho^2}{2}\, dx.$$

Sous cette dernière forme, on voit que le volume O peut s'ob-

tenir en prenant la fonction de θ qui représente le moment de l'aire d'un feuillet par rapport à l'arête commune (soit b cette fonction) et en calculant l'intégrale

$$O = \int_0^\Theta b\, d\theta.$$

Pour ce qui va suivre, nous désignerons par a l'aire d'un feuillet, $a = \int_0^X \rho\, dx$; par b (comme nous venons de l'indiquer) le moment de cette aire par rapport à l'arête, $b = \int_0^X \frac{\rho^2}{2} dx$; par c le moment d'inertie de cette aire par rapport à l'arête, $c = \int_0^X \frac{\rho^3}{3} dx$; par d le moment produit de cette aire par rapport à l'arête et à l'intersection du feuillet avec la section origine, $d = \int_0^X \frac{\rho^2 x}{2} dx$.

M_{oxy}, *moment du volume* O *par rapport au feuillet origine.*

Décomposons le volume O en onglets infinitésimaux compris entre deux sections et deux feuillets infiniment voisins. Le volume élémentaire est $dx \frac{\rho^2}{2} d\theta$; le centre de gravité de ce volume élémentaire est à la distance $\frac{2}{3}\rho$ de l'arête.

Le moment élémentaire par rapport au feuillet origine est donc

$$dx \frac{\rho^2}{2} d\theta \frac{2}{3} \rho \sin\theta \quad \text{ou} \quad \frac{\rho^3}{3} dx \sin\theta\, d\theta.$$

En intégrant une première fois le long du feuillet (θ constant), il vient

$$\sin\theta\, d\theta \int_0^X \frac{\rho^3}{3} dx \quad \text{ou} \quad c \sin\theta\, d\theta,$$

et, en intégrant une seconde fois de $\theta = 0$ à $\theta = \Theta$, on obtient

$$M_{oxy} = \int_0^\Theta c \sin\theta\, d\theta.$$

M_{oxy_1}, *moment du volume* O *par rapport au feuillet extrême* ADBE.

On verrait de la même façon que l'expression de M_{oxy_1} est

$$M_{oxy_1} = \int_0^\Theta c \sin(\Theta - \theta)\, d\theta.$$

M_{oxz}, *moment du volume* O *par rapport à un feuillet perpendiculaire au feuillet origine*,

$$M_{oxz} = \int_0^\Theta c \cos\theta \, d\theta.$$

M_{oxz_1}, *moment du volume* O *par rapport à un feuillet perpendiculaire au feuillet extrême*,

$$M_{oxz_1} = \int_0^\Theta c \cos(\Theta - \theta) \, d\theta.$$

On a par ailleurs les relations

$$\sin(\Theta - \theta) = \sin\Theta \cos\theta - \sin\theta \cos\Theta,$$
$$\cos(\Theta - \theta) = \cos\Theta \cos\theta + \sin\Theta \sin\theta:$$

d'où les expressions de M_{oxy_1} et de M_{oxz_1} en fonction de M_{oxy} et de M_{oxz}

$$M_{oxy_1} = \sin\Theta \, M_{oxz} - \cos\Theta \, M_{oxy}.$$
$$M_{oxy_1} = \cos\Theta \, M_{oxz} + \sin\Theta \, M_{oxy}.$$

On peut donc se borner à considérer les moments du volume O par rapport au feuillet origine et au feuillet perpendiculaire, c'est-à-dire aux plans des xy et des xz.

M_{oyz}, *moment du volume* O *par rapport à la section origine.*

Ce moment, par rapport au troisième plan de projection du système orthogonal, est pour l'élément $dx \frac{\rho^2}{2} d\theta$ du volume

$$dx \frac{\rho^2}{2} d\theta . x;$$

d'où, par une première intégration (θ constant),

$$d\theta \int_0^X \frac{\rho^2 x}{2} dx \quad \text{ou} \quad d.d\theta$$

et, par une seconde intégration,

$$M_{oyz} = \int_0^\Theta d.d\theta.$$



CHAPITRE II.

FORMULES APPROCHÉES APPLICABLES AUX SURFACES TOPOGRAPHIQUES OU TABULAIRES.

---

5. Observation générale sur la quadrature d'une fonction quelconque des coordonnées d'une courbe plane.

Nous venons de voir que les formules exactes, que nous aurions à appliquer si la surface de la carène était une surface analytiquement connue, sont des quadratures simples (ou doubles) de fonctions des coordonnées d'une courbe plane (ou d'une surface gauche) donnée. Or la quadrature simple d'une fonction (xy par exemple) peut se ramener à la quadrature type d'une aire par un changement de variable, ou, autrement dit, par la construction d'une courbe auxiliaire dérivant de la courbe donnée. C'est ainsi que la fonction $M_{oy} = \int_{x_0}^{x_1} xy\,dx$ se ramènera au type $\int y\,dx$ en posant $xy = ky'$, d'où $M_{oy} = k\int_{x_0}^{x_1} y'\,dx$; c'est-à-dire en construisant une courbe auxiliaire ayant les mêmes x, mais des ordonnées y' différentes de y et fonctions de x et de y (k est une constante arbitraire, dépendant des échelles adoptées et introduite pour rendre les équations homogènes). On poserait de même, pour toute autre formule telle que le moment-produit d'inertie $P_{oxy} = \int_{x_0}^{x_1} \frac{xy^2}{2}\,dx$,

$$\frac{xy^2}{2} = k_1^2 y'',$$

et ainsi de suite.

Nous allons donc traiter seulement la question de la quadrature type, simple d'abord, puis double, appliquée aux surfaces topographiques ou tabulaires. Les diverses méthodes que nous allons

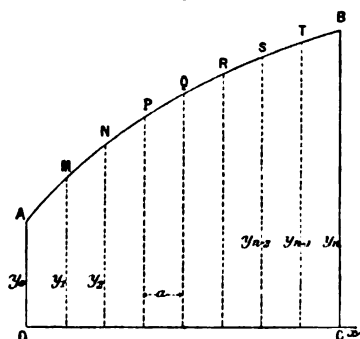
exposer conduiront à différentes formules, indiquant des calculs plus ou moins simples à effectuer sur des ordonnées successives. Ces calculs numériques et leurs expressions représentatives n'acquièrent en général de l'exactitude qu'aux dépens d'une certaine complication qui rend les opérations plus longues et plus fastidieuses, malgré l'emploi que l'on peut faire de machines à calculer, telles que l'arithmomètre. Nous décrirons en premier lieu la méthode dite *des trapèzes,* parce qu'en France, dans la pratique des constructions navales, on l'a depuis longtemps adoptée comme à la fois simple, commode et susceptible d'une approximation suffisante.

MÉTHODE DES TRAPÈZES.

6. Quadrature simple.

Soit OABC (*fig.* 2) l'aire plane proposée; divisons la base en n parties égales de longueur a et, par les points de division, élevons les ordonnées $y_0, y_1, \ldots, y_n$, aboutissant sur la

Fig. 2.



courbe en AMNPQRSTB. Substituons au contour courbe réel AB le contour polygonal AMNPQRSTB, dont l'aire est facile à obtenir puisqu'elle se compose d'une série d'aires trapézoïdales, dont les valeurs sont les suivantes

$$a\left(\frac{y_0}{2}+\frac{y_1}{2}\right), \qquad a\left(\frac{y_1}{2}+\frac{y_2}{2}\right),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$a\left(\frac{y_{n-2}}{2}+\frac{y_{n-1}}{2}\right), \quad a\left(\frac{y_{n-1}}{2}+\frac{y_n}{2}\right),$$

et dont la somme est

$$A = a\left(\frac{y_0}{2} + y_1 + y_2 \ldots + y_{n-1} + \frac{y_n}{2}\right),$$

que nous représenterons d'une façon symbolique par

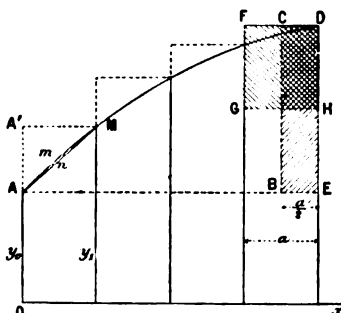
$$(1) \qquad A = a\sum_0^n (y),$$

$\sum_0^n (y)$ désignant la somme d'une série d'ordonnées dont les deux extrêmes sont divisées par 2.

7. Limite supérieure de l'erreur commise.

Si, dans les limites de l'intégration, la courbe proposée ne présente ni point d'inflexion ni maximum, on voit aisément que chacun des segments $AnMm$ (*fig.* 3) (dont la somme représente

Fig. 3.



l'erreur commise) est plus petit que l'aire du triangle correspondant AA'M, dont la valeur est

$$\frac{a}{2}(y_1 - y_0).$$

L'erreur commise ε est donc plus petite que la somme

$$\frac{a}{2}(y_1 - y_0) + \frac{a}{2}(y_2 - y_1) + \ldots + \frac{a}{2}(y_n - y_{n-1}) = \frac{a}{2}(y_n - y_0),$$

laquelle représente le rectangle BCDE, de largeur $\frac{a}{2}$, ou DFGH, de largeur a et de hauteur $DH = \frac{1}{2}DE$. Telle est la limite supé-

rieure de l'erreur dans ce cas

$$\varepsilon < \frac{a}{2}(y_n - y_0).$$

Si, dans les limites de l'intégration, la courbe proposée présente un maximum, on peut faire passer une ordonnée de division y_s aussi près qu'on voudra de ce maximum, en choisissant la longueur a comme il convient, et considérer isolément les deux parties de la courbe situées de part et d'autre de y_s. L'expression de l'aire totale ne change pas; on a, en effet, en désignant par A′ et A″ les deux aires partielles,

$$A' = a\sum_0^s(y),$$

$$A'' = a\sum_s^n(y),$$

et, pour la somme $A' + A'' = A$,

$$A = a\sum_0^n(y),$$

formule identique à la formule (1).

Mais l'expression de la limite supérieure de l'erreur n'est plus la même; car on a, pour les erreurs partielles ε' et ε'', positives toutes deux (*fig.* 4),

$$\varepsilon' < \frac{a}{2}(y_s - y_0),$$

$$\varepsilon'' < \frac{a}{2}(y_s - y_n);$$

d'où la somme

$$\varepsilon' + \varepsilon'' = \varepsilon < \frac{a}{2}[2y_s - (y_0 + y_n)].$$

Ici la limite supérieure est la somme des deux rectangles BCDE et FDHG, de largeur $\frac{a}{2}$, ou encore d'un rectangle de largeur a et de hauteur $y_s - \frac{y_0 + y_n}{2}$, c'est-à-dire DT, en prenant le point T au milieu de EF (*fig.* 4).

Si enfin, dans les limites de l'intégration, la courbe proposée présente un point d'inflexion (*fig.* 5), on peut faire passer une

ordonnée de division y_i aussi près qu'on voudra de ce point d'inflexion, et considérer les deux portions de courbe séparées par y_i.

Fig. 4.

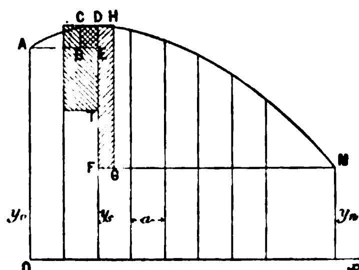
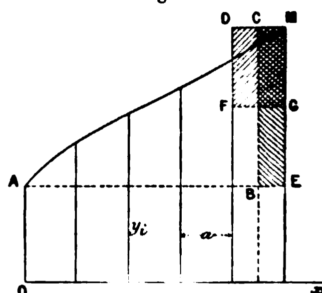


Fig. 5.



Ici les erreurs partielles sont de signe contraire, et, comme on a, en valeur absolue,

$$\varepsilon' < \frac{a}{2}(y_i - y_0).$$

$$\varepsilon'' < \frac{a}{2}(y_n - y_i),$$

l'erreur totale $\varepsilon = \varepsilon' - \varepsilon''$ sera certainement inférieure à la somme $\varepsilon' + \varepsilon''$. On aura donc, pour limite supérieure de ε, comme dans le premier cas, l'expression

$$\frac{a}{2}(y_n - y_0);$$

d'où

$$\varepsilon < \frac{a}{2}(y_n - y_0),$$

la limite supérieure étant alors représentée par l'un des rectangles MDFG ou MCBE.

Il est bien évident que la méthode des trapèzes est, en général, bien plus exacte que ne l'indiquerait la limite d'erreur ci-dessus calculée, ou autrement dit qu'en général la limite ci-dessus est très éloignée de l'erreur réelle.

8. Application aux fonctions implicites.

La formule que nous venons de trouver pour la quadrature simple par la méthode des trapèzes, $A = a\sum_0^n (y_k)$, s'applique à une fonction quelconque des coordonnées d'une courbe plane

$y=f(x)$. Soit, en effet, la fonction implicite $\varphi(x,y)$ à intégrer de o à na. On commencera par construire la courbe auxiliaire $y'=\varphi(x,y)$ par points correspondant aux abscisses o, a, $2a$, ..., na, ce qui est facile, puisqu'on connaît, par la courbe proposée, les valeurs de y pour ces mêmes abscisses. La valeur de l'intégrale cherchée $\int_0^{na}\varphi(x,y)\,dx$ ne sera donc autre que

$$\int_0^{na}\varphi(x,y)\,dx = a\sum_0^n (y').$$

9. Quadrature double.

Soit maintenant à calculer, par la méthode des trapèzes, le volume $Q=\int_0^{na}\int_0^{mb} z\,dx\,dy$ compris entre la surface topographique $z=f(x,y)$ et cinq plans orthogonaux parallèles respectivement aux plans de projection. Donnons d'abord à x une

Fig. 6.

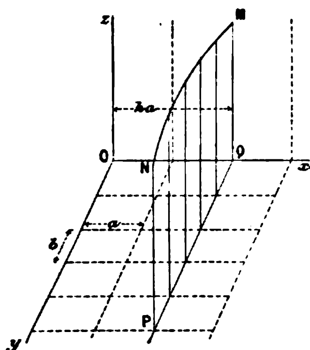
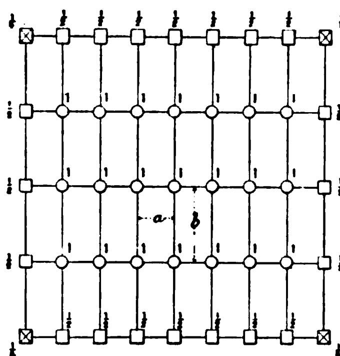


Fig. 7.



valeur constante, $x=ka$ par exemple (*fig.* 6). La quadrature simple

$$\int_0^{mb} z_{ka}\,dy = b\sum_0^m (z_{ka})$$

représentera l'aire A_{ka} d'une section MNPQ parallèle au plan zy et située à la distance ka de ce plan

$$A_{ka}=b\sum_0^m (z_{ka}).$$

Si maintenant nous construisons la courbe auxiliaire des aires A en fonction de x et que nous cherchions l'aire Q entre les limites o et na, cette aire ne sera autre chose que le volume cherché; d'où

$$Q = \int_0^{na} A_{ka}\, dx = a\sum_0^n (A_{ka}) = ab\sum_0^n \sum_0^m (z),$$

le symbole $\sum_0^n \sum_0^m$ désignant la somme des ordonnées de la surface dont les pieds aboutissent aux points d'intersection du quadrillage formé sur le plan horizontal, entre les limites d'intégration, par les traces des sections distantes de a et de b, avec cette condition que les ordonnées des quatre coins soient divisées par 4, et que les autres ordonnées des quatre côtés soient divisées par 2 (*fig.* 7).

10. Application de la formule des trapèzes aux courbes et surfaces.

A, aire d'une courbe plane en coordonnées rectangulaires,

$$A = \int_0^{na} y\, dx = a\sum_0^n (y).$$

A′, aire d'une courbe plane en coordonnées polaires,

$$A' = \frac{1}{2}\int_0^{n\omega_a} \rho^2\, d\omega = \frac{1}{2}\omega_a\sum_0^n (\rho^2).$$

M_{ox}, moment de l'aire A par rapport à l'axe Ox,

$$M_{ox} = \frac{1}{2}\int_0^{na} y^2\, dx = \frac{1}{2}a\sum_0^n (y^2).$$

M_{oy}, moment de l'aire A par rapport à l'axe Oy,

$$M_{oy} = \int_0^{na} xy\, dx = a\sum_0^n (xy) = a^2\sum_0^n (ky),$$

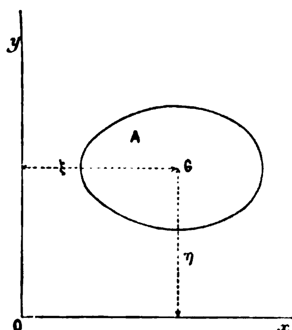
en désignant par k le nombre entier compris entre o et n qui définit le rang de l'ordonnée.

ξ et η, coordonnées du centre de gravité de l'aire A (*fig.* 8),

$$A\xi = M_{oy}, \quad \text{d'où} \quad \xi = \frac{a^2 \sum_0^n (ky)}{a \sum_0^n (y)} = a \frac{\sum_0^n (ky)}{\sum_0^n (y)};$$

$$A\eta = M_{ox}, \quad \text{d'où} \quad \eta = \frac{\frac{1}{2} a \sum_0^n (y^2)}{a \sum_0^n (y)} = \frac{1}{2} \frac{\sum_0^n (y^2)}{\sum_0^n (y)}.$$

Fig. 8.



I_{ox}, moment d'inertie de l'aire A par rapport à l'axe Ox,

$$I_{ox} = \int_0^{na} \frac{y^3}{3} dx = \frac{1}{3} a \sum_0^n (y^3).$$

I_{oy}, moment d'inertie de l'aire A par rapport à l'axe Oy,

$$I_{oy} = \int_0^{na} x^2 y \, dx = a^3 \sum_0^n (k^2 y).$$

P_{oxy}, moment produit d'inertie de l'aire A par rapport aux axes Ox et Oy,

$$P_{oxy} = \int_0^{na} \frac{xy^2}{2} dx = \frac{a^2}{2} \sum_0^n (ky^2).$$

I_o, moment d'inertie polaire de l'aire A par rapport à l'origine,

$$I_o = I_{ox} + I_{oy} = \frac{a}{3} \sum_0^n (y^3) + a^3 \sum_0^n (k^2 y).$$

I'_o, moment d'inertie polaire de l'aire A' par rapport à l'origine,

$$I'_o = \frac{1}{4} \int_0^{n\omega_a} \rho^4 \, d\omega = \frac{1}{4} \omega_a \sum_0^n (\rho^4).$$

Q, volume limité par une surface gauche et cinq plans orthogonaux,

$$Q = \int_0^{na} A\,dx = a\sum_0^n (A) = b\sum_0^m (A') = ab\sum_0^n \sum_0^m (z),$$

en appelant A et A' les aires des sections parallèles à Oy et à Ox.

M_{oxy}, M_{oyz}, M_{oxz}, moments du volume Q par rapport aux plans des xy, des yz et des xz,

$$M_{oxy} = \int_0^{na}\int_0^{mb} \frac{z^2}{2}\,dx\,dy = \frac{ab}{2}\sum_0^n \sum_0^m (z^2);$$

$$M_{oyz} = \int_0^{na}\int_0^{mb} zx\,dx\,dy = ab\sum_0^n \sum_0^m (zx) = a^2b\sum_0^n \sum_0^m (kz),$$

en désignant par k le nombre entier, de o à n, définissant le rang de la section perpendiculaire à Ox;

$$M_{ozx} = \int_0^{na}\int_0^{mb} zy\,dx\,dy = ab\sum_0^n \sum_0^m (zy) = ab^2\sum_0^n \sum_0^m (k'z),$$

en désignant par k' le nombre entier, de o à m, définissant le rang de la section perpendiculaire à Oy.

ξ, η, ζ, coordonnées du centre de gravité du volume Q,

$$\xi Q = M_{oyz}, \qquad \eta Q = M_{oxz}, \qquad \zeta Q = M_{oxy};$$

d'où

$$\xi = \frac{a^2b\sum_0^n \sum_0^m (kz)}{ab\sum_0^n \sum_0^m (z)} = a\frac{\sum_0^n \sum_0^m (kz)}{\sum_0^n \sum_0^m (z)};$$

$$\eta = \frac{ab^2\sum_0^n \sum_0^m (k'z)}{ab\sum_0^n \sum_0^m (z)} = b\frac{\sum_0^n \sum_0^m (k'z)}{\sum_0^n \sum_0^m (z)};$$

$$\zeta = \frac{\frac{ab}{2}\sum_0^n \sum_0^m (z^2)}{ab\sum_0^n \sum_0^m (z)} = \frac{1}{2}\frac{\sum_0^n \sum_0^m (z^2)}{\sum_0^n \sum_0^m (z)}.$$

Formules des onglets. — a, aire d'un feuillet,

$$a = \int_0^{n\lambda} \rho\,dx = \lambda\sum_0^n (\rho).$$

b, moment de l'aire a par rapport à l'arête,

$$b = \int_0^{n\lambda} \frac{\rho^2}{2} dx = \frac{\lambda}{2} \sum_0^n (\rho^2).$$

c, moment d'inertie de l'aire a par rapport à l'arête,

$$c = \int_0^{n\lambda} \frac{\rho^3}{3} dx = \frac{\lambda}{3} \sum_0^n (\rho^3).$$

d, moment-produit d'inertie de l'aire a par rapport à l'arête et à la perpendiculaire à l'origine,

$$d = \int_0^{n\lambda} \frac{\rho^2 x}{2} dx = \frac{\lambda}{2} \sum_0^n (\rho^2 x) = \frac{\lambda^2}{2} \sum_0^n (k\rho^2)$$

(k indice du rang du rayon ρ).

O, volume de l'onglet,

$$\mathrm{O} = \int_0^{m\omega_a} b\, d\theta = \omega_a \sum_0^m (b) = \frac{\omega_a \lambda}{2} \sum_0^m \sum_0^n (\rho^2).$$

M_{oxy}, M_{oxz}, M_{oyz}, moments du volume O par rapport au feuillet origine, au feuillet perpendiculaire et à la section origine,

$$M_{oxy} = \int_0^{m\omega_a} c \sin\theta\, d\theta = \omega_a \sum_0^m (c \sin\theta) = \frac{\omega_a \lambda}{3} \sum_0^m \sum_0^n (\rho^3 \sin\theta)$$
$$= \omega_a (\tfrac{1}{2} c_0 \sin 0^\circ + c_1 \sin\omega_a + c_2 \sin 2\omega_a + \ldots + \tfrac{1}{2} c_m \sin m\omega_a);$$
$$M_{oxz} = \int_0^{m\omega_a} c \cos\theta\, d\theta = \omega_a \sum_0^m (c \cos\theta) = \frac{\omega_a \lambda}{3} \sum_0^m \sum_0^n (\rho^3 \cos\theta)$$
$$= \omega_a (\tfrac{1}{2} c_0 \cos 0^\circ + c_1 \cos\omega_a + c_2 \cos 2\omega_a + \ldots + \tfrac{1}{2} c_m \cos m\omega_a);$$
$$M_{oyz} = \int_0^{m\omega_a} d\, d\theta = \omega_a \sum_0^m (d) = \frac{\omega_a \lambda^2}{2} \sum_0^m \sum_0^n (k\rho^2).$$

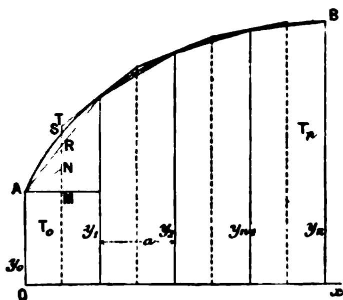
MÉTHODE DES TRAPÈZES CORRIGÉE.

11. Quadrature simple.

On peut, en modifiant un peu la méthode des trapèzes, arriver à une expression plus approchée de la grandeur de l'aire proposée.

Soit, en effet, une portion de courbe AB, sans point d'inflexion. Pour déterminer l'aire qu'elle limite, traçons d'abord les ordonnées de division, distantes de la longueur a, comme dans la méthode précédente, puis des ordonnées intercalaires à égale distance des premières. Par les sommets des ordonnées principales, sauf des extrêmes, menons à la courbe des tangentes que nous arrêterons sur les deux intercalaires les plus voisines, puis nous augmenterons la somme des trapèzes formés par les tangentes, des trapèzes mixtilignes extrêmes T_0 et T_n. Nous aurons ainsi une série de trapèzes circonscrits, et de trapèzes ordinaires inscrits, si la convexité de AB est tournée vers les y positifs; ou inversement, si la convexité de AB est tournée vers les y négatifs. Mais, de toute façon, l'aire proposée est intermédiaire aux deux sommes calculées. Pour fixer les idées, supposons la convexité tournée vers les y positifs; alors les trapèzes formés par les tangentes sont circonscrits ou extérieurs, et nous appellerons leur somme A_e, tandis que ceux formés par les cordes sont inscrits ou intérieurs, et nous appellerons leur somme A_i.

Fig. 9.



On a

$$A_e = T_0 + a(y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-2} + y_{n-1}) + T_n,$$

$$A_i = a\left(\frac{y_0}{2} + y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-2} + y_{n-1} + \frac{y_n}{2}\right).$$

L'aire exacte étant comprise entre les deux, prenons la moyenne A_m entre A_e et A_i

$$A_m = \frac{A_e + A_i}{2} = \frac{2A_i + \left(T_0 - a\frac{y_0}{2}\right) + \left(T_n - a\frac{y_n}{2}\right)}{2}$$

ou

$$A_m = A_i + \frac{1}{2}\left(T_0 - a\frac{y_0}{2}\right) + \frac{1}{2}\left(T_n - a\frac{y_n}{2}\right).$$

Or

$$T_0 - \frac{a}{2}y_0 = \text{triangle mixtiligne SAM}$$
$$= \text{segment SAR ou } t_0 + \text{triangle RAM},$$

c'est-à-dire

$$T_0 - \frac{a}{2} y_0 = t_0 + \frac{a}{4} \frac{y_1 - y_0}{2} = t_0 + \frac{a}{8}(y_1 - y_0);$$

de même,

$$T_n - \frac{a}{2} y_n = \ldots = t_n + \frac{a}{8}(y_n - y_{n-1});$$

finalement,

$$A_m = A_i + \frac{a}{16}(y_1 - y_0) + \frac{a}{16}(y_n - y_{n-1}) + \frac{t_0}{2} + \frac{t_n}{2},$$

et, en négligeant $\frac{t_0}{2}$ et $\frac{t_n}{2}$, nous prendrons seulement

(1') $$A'_m = A_i + \frac{a}{16}(y_1 - y_0) + \frac{a}{16}(y_n - y_{n-1}).$$

12. Erreur commise dans cette méthode.

Si nous avions pris A_m au lieu de A'_m, l'erreur commise ε eût été moindre que la différence entre l'une ou l'autre des quantités extrêmes A_i ou A_e et leur moyenne A_m. On aurait donc eu pour limite supérieure de ε

$$\varepsilon < A_m - A_i < \frac{a}{16}(y_1 - y_0) + \frac{a}{16}(y_n - y_{n-1}) + \frac{t_0}{2} + \frac{t_n}{2}.$$

Mais, en prenant A'_m, nous avons négligé, en outre, $\frac{t_0}{2}$ et $\frac{t_n}{2}$; l'erreur pourra donc, au maximum, être augmentée de la quantité négligée, d'où la limite supérieure nouvelle

$$\varepsilon < t_0 + \frac{a}{16}(y_1 - y_0) + t_n + \frac{a}{16}(y_n - y_{n-1}).$$

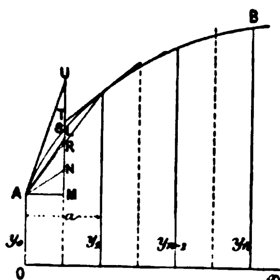
Or $\frac{a}{16}(y_1 - y_0)$ n'est autre que la moitié du triangle ARM; donc $t_0 + \frac{a}{16}(y_0 - y_1)$ est représenté par le triangle mixtiligne ASN, et $t_n + \frac{a}{16}(y_n - y_{n-1})$ par le triangle mixtiligne semblable de l'autre extrémité, la somme de ces triangles mixtilignes indiquant une limite supérieure de l'erreur à commettre en employant la méthode des trapèzes corrigée pour l'évaluation d'une aire déterminée.

MÉTHODE DE POISSON.

13. Quadrature simple.

Dans la méthode précédente, menons des tangentes à la courbe aux sommets des ordonnées extrêmes, comme à ceux des autres ordonnées principales (*fig.* 10). Soient α_0 l'angle que fait avec Ox

Fig. 10.



la tangente en A, et α_n celui de la tangente en B. Nous aurons, pour A_e,

$$A_e = \frac{a}{2}y_0 + \text{AMU} + a(y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-2} + y_{n-1}) + \frac{a}{2}y_n + (\text{AMU})_n,$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned} A_e &= A_i + (\text{AMU})_0 + (\text{AMU})_n \\ &= A_i + \frac{1}{2}\frac{a}{2}\frac{a}{2}\operatorname{tang}\alpha_0 + \frac{1}{2}\frac{a}{2}\frac{a}{2}\operatorname{tang}\alpha_n = A_i + \frac{a^2}{8}(\operatorname{tang}\alpha_0 + \operatorname{tang}\alpha_n). \end{aligned}$$

Prenons la moyenne $A_m = \frac{A_e + A_i}{2}$,

$$(1'') \qquad A_m = \frac{2A_i + \frac{a^2}{8}(\operatorname{tang}\alpha_0 + \operatorname{tang}\alpha_n)}{2} = A_i + \frac{a^2}{16}(\operatorname{tang}\alpha_0 + \operatorname{tang}\alpha_n).$$

14. Erreur commise dans cette méthode.

La limite supérieure de l'erreur ε est ici $A_m - A_i$, autrement dit

$$\varepsilon < \frac{a^2}{16}(\operatorname{tang}\alpha_0 + \operatorname{tang}\alpha_n).$$

Prenons le point L au milieu de UM; la limite supérieure sera

représentée par deux triangles rectilignes : le triangle ALM et son homologue de l'autre extrémité. La limite supérieure de cette méthode est donc plus grande que celle de la méthode des trapèzes corrigée, si le triangle rectiligne ALN est plus grand, à chaque extrémité, que le segment SAR.

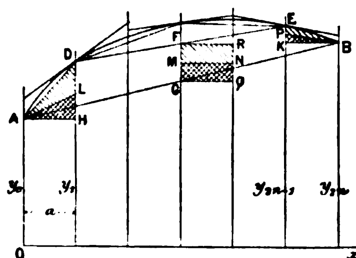
MÉTHODE DE PONCELET.

15. Quadrature simple.

Supposons toujours la courbe sans point d'inflexion et, pour fixer les idées, concave vers les y négatifs dans les limites d'intégration.

Partageons la base en un nombre *pair* d'intervalles égaux (*fig.* 11) et menons les ordonnées $y_0, y_1, \ldots, y_{2n-1}, y_{2n}$. Joi-

Fig. 11.



gnons par des droites les extrémités des deux premières, y_0, y_1; des deux dernières, y_{2n-1}, y_{2n}; puis, de deux en deux, celles des ordonnées d'indice impair. Nous formerons ainsi une série de trapèzes inscrits, dont la somme A_i est plus petite que l'aire proposée et égale à

$$A_i = a\,\frac{y_0+y_1}{2} + a\,\frac{y_{2n-1}+y_{2n}}{2} + a(y_1+y_3) + a(y_3+y_5) + \ldots + a(y_{2n-3}+y_{2n-1}),$$

$$A_i = a\left(\frac{y_0}{2} + \frac{3\,y_1}{2} + 2y_3 + 2y_5 + \ldots + 2y_{2n-3} + \frac{3}{2}\,y_{2n-1} + \frac{y_{2n}}{2}\right)$$

ou, en appelant I la somme des ordonnées d'indice impair,

$$A_i = a\left[2\mathrm{I} + \tfrac{1}{2}(y_0+y_{2n}) - \tfrac{1}{2}(y_1+y_{2n-1})\right].$$

Formons maintenant une autre somme de trapèzes circonscrits A_e, plus grande que l'aire proposée, en menant par le sommet de

chaque ordonnée impaire une tangente à la courbe, qu'on terminera aux deux ordonnées immédiatement précédente et suivante. On aura ainsi

$$A_e = 2ay_1 + 2ay_3 + \ldots + 2ay_{2n-1} = 2aI.$$

Prenons la moyenne $A_m = \frac{A_i + A_e}{2}$

$$A_m = 2aI + \frac{a}{4}(y_0 + y_{2n}) - \frac{a}{4}(y_1 + y_{2n-1}).$$

Nous négligerons enfin les deux termes complémentaires et nous prendrons seulement

$$(1''') \qquad A'_m = 2aI.$$

Cette expression de A'_m est celle qu'on emploie couramment dans le calcul des diagrammes de machines à vapeur, parce qu'elle dispense de l'emploi des ordonnées de rang pair et en particulier des ordonnées extrêmes, difficiles à mesurer exactement dans ce cas.

16. Erreur commise dans cette méthode.

Si l'on employait la valeur A_m, la limite supérieure de l'erreur serait $A_e - A_m$, c'est-à-dire qu'on aurait

$$\varepsilon < \frac{a}{4}[(y_1 + y_{2n-1}) - (y_0 + y_{2n})]$$

ou

$$< \frac{a}{2}\left(\frac{y_1 + y_{2n-1}}{2} - \frac{y_0 + y_{2n}}{2}\right)$$

ou

$$< \frac{a}{2}\left(\frac{y_1 - y_0}{2} + \frac{y_{2n-1} - y_{2n}}{2}\right).$$

En joignant les sommets de y_1 et y_{2n-1}, de y_0 et de y_{2n}, les lignes DE et AB (*fig.* 11) coupent l'ordonnée milieu en F et G ; le rectangle construit sur les longueurs FG et $\frac{a}{2}$ ou sur $\frac{FG}{2}$ et a, c'est-à-dire GMNQ, représenterait la limite supérieure de ε ; on pourrait encore prendre pour représenter cette limite, d'après sa dernière expression, la somme des moitiés des deux triangles ADH et BEK ou ALH + BPK.

Mais, en prenant A'_m, au lieu de A_m, la limite supérieure de ε s'accroît des termes négligés et devient

$$\varepsilon < \frac{a}{2}\left(\frac{y_1+y_{2n-1}}{2} - \frac{y_0+y_{2n}}{2}\right) + \frac{a}{2}\left(\frac{y_1+y_{2n-1}}{2} - \frac{y_0+y_{2n}}{2}\right),$$

c'est-à-dire qu'elle double et qu'elle est alors représentée par le rectangle FRGQ ou par les deux triangles ADH + BEK.

MÉTHODE GÉNÉRALE DES PARABOLES.

17. Quadrature simple.

Jusqu'ici nous avons remplacé le contour courbe proposé par une ligne polygonale. Or il est clair que, tant qu'il ne s'agit que d'obtenir l'expression d'une aire voisine de celle limitée par la courbe, on peut remplacer cette courbe par une infinité de contours composés d'arcs droits ou courbes et plus ou moins rapprochés du contour vrai. Les arcs de courbe auxquels nous pourrons surtout recourir seront ceux qui limitent une aire, s'exprimant de façon simple en fonction des ordonnées équidistantes comprises dans l'étendue de l'arc et de l'équidistance a de ces ordonnées. Nous allons voir que les arcs de paraboles de degré plus ou moins élevé répondent à cette condition.

Nous décomposerons donc la distance L comprise entre les ordonnées extrêmes en m groupes de k intervalles égaux à a, de telle façon que $L = (mk)a$, et par les $k+1$ sommets compris dans chaque groupe nous ferons passer un arc de parabole du degré k. En d'autres termes, on partage la distance L en un nombre d'intervalles (mk) qui doit être un multiple m du degré de la parabole employée.

L'équation de cette parabole, à $k+1$ paramètres, étant pour le $u^{\text{ième}}$ groupe

$$y = \alpha_u x^k + \beta_u x^{k-1} + \ldots + \gamma_u x + \delta_u,$$

la parabole sera déterminée, puisque, pour déterminer α_u, β_u, ..., γ_u, δ_u, on a les $k+1$ équations de conditions

$$\begin{aligned}
y_0 &= \alpha_u x_0^k + \beta_u x_0^{k-1} + \ldots + \gamma_u x_0 + \delta_u,\\
y_1 &= \alpha_u x_1^k + \beta_u x_1^{k-1} + \ldots + \gamma_u x_1 + \delta_u,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
y_k &= \alpha_u x_k^k + \beta_u x_k^{k-1} + \ldots + \gamma_u x_k + \delta_u.
\end{aligned}$$

Dès lors, l'aire comprise entre l'arc de parabole, l'axe Ox, et les deux ordonnées extrêmes du $u^{\text{ième}}$ groupe, aura pour expression générale

$$A_{x_0}^{x_k} = \int_{x_0}^{x_k} y\,dx = \frac{\alpha_u}{k+1}\left(x_k^{k+1} - x_0^{k+1}\right) + \frac{\beta_u}{k}\left(x_k^k - x_0^k\right) + \ldots$$
$$+ \gamma_u\left(x_k^2 - x_0^2\right) + \delta_u\left(x_k - x_0\right).$$

En remplaçant dans cette expression x_k par uka et x_0 par $(u-1)ka$, puis en y faisant varier u de 1 à m, on obtient la série des aires élémentaires dont la somme fournira l'aire totale, et il ne restera plus, dans l'expression de cette somme, qu'à tirer les valeurs, en fonction des ordonnées mesurées

$$[(y_0 y_1 \ldots y_k)(y'_1 \ldots y'_k)\ldots(y_1^{(m)} \ldots y_k^{(m)})],$$

des $m(k+1)$ paramètres α_u, β_u, ..., δ_u au moyen des m groupes de $k+1$ équations de conditions.

18. Première règle de Simpson. — Parabole du second degré.

Faisons $k = 2$, ce qui nous conduira à partager la longueur totale L en un nombre pair d'intervalles.

L'expression de l'aire élémentaire devient

$$A_{(u-1)2a}^{u2a} = \frac{\alpha_u}{3}\left[u^3 2^3 a^3 - (u-1)^3 2^3 a^3\right]$$
$$+ \frac{\beta_u}{2}\left[u^2 2^2 a^2 - (u-1)^2 2^2 a^2\right] + \gamma_u\left[u2a - (u-1)2a\right]$$

ou

$$= \frac{\alpha_u}{3}(2a)^3(3u^2 - 3u + 1) + \frac{\beta_u}{2}(2a)^2(2u-1) + \gamma_u(2a).$$

Or les paramètres sont donnés par

$$y_0 = \alpha_u(2u-2)^2 a^2 + \beta_u(2u-2)a + \gamma_u,$$
$$y_1 = \alpha_u(2u-1)^2 a^2 + \beta_u(2u-1)a + \gamma_u,$$
$$y_2 = \alpha_u(2u)^2 a^2 + \beta_u(2u)a + \gamma_u;$$

d'où l'on tire

$$\alpha_u = \frac{1}{2a^2}(y_2 - 2y_1 + y_0),$$

$$\beta_u = \frac{1}{2a}(3y_2 - 4y_1 + y_0) - \frac{2u}{a}(y_2 - 2y_1 + y_0),$$

$$\gamma_u = y_2 - u(3y_2 - 4y_1 + y_0) + 2u^2(y_2 - 2y_1 + y_0).$$

En développant A au moyen de ces valeurs des paramètres, il reste seulement

$$A_{(u-1)2a}^{u2a} = \frac{a}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2).$$

Faisons maintenant varier u de 1 à m et effectuons la somme totale, nous trouverons

$$A_0^{2a} = \frac{a}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2),$$

$$A_{2a}^{4a} = \frac{a}{3}(y_2 + 4y_3 + y_4),$$

$$A_{4a}^{6a} = \frac{a}{3}(y_4 + 4y_5 + y_6),$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$

$$A_{(m-1)2a}^{m2a} = \frac{a}{3}(y_{2m-2} + 4y_{2m-1} + y_{2m});$$

d'où, pour la somme A, en désignant par P la somme des ordonnées de rang pair, et par I celle des ordonnées de rang impair,

$$(2) \qquad A = \frac{a}{3}[2P + 4I - (y_0 + y_{2m})].$$

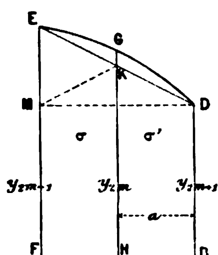
La parabole du deuxième degré, qui donne naissance à la quadrature approchée ci-dessus, est la première qu'ait employée Simpson. Il est évident que, si, en certains endroits, on veut plus d'exactitude, on peut employer des ordonnées intercalaires en nombre impair. Si la courbe présente des points d'inflexion, on pourrait la décomposer en plusieurs parties par des ordonnées passant par ces points d'inflexion, puis évaluer séparément chacune des parties par la formule précédente. Remarquons toutefois que, si les points d'inflexion se trouvent sur des ordonnées de division (ou du moins très voisins des ordonnées de division), il est inutile de s'astreindre à la décomposition de la courbe. En effet, si c'est une ordonnée paire que reçoit le point d'inflexion, la formule fournit d'elle-même la décomposition de la courbe en deux parties, et, si c'est une ordonnée impaire, l'arc de parabole, passant par le point d'inflexion et par les deux sommets des ordonnées les plus voisines, aura une courbure très peu sensible, en sorte que les erreurs commises par l'emploi de la parabole seront de signe contraire de part et d'autre du point d'inflexion et se compenseront très sensiblement.

19. Modification de la formule pour un nombre impair de divisions.

Quand on est contraint d'employer un nombre impair de divisions, la formule (2) doit recevoir un terme correctif. Soit, en effet, y_{2m} la dernière ordonnée à laquelle s'applique la méthode des paraboles du second degré; nous aurons une aire supplémentaire, comprise entre y_{2m} et y_{2m+1}, à calculer en fonction des ordonnées et de l'équidistance.

Pour cela, faisons passer une parabole du second degré par les sommets de y_{2m-1}, y_{2m} et y_{2m+1}. Désignons par σ et σ' les

Fig. 12.



aires des deux trapèzes mixtilignes EFGH et GHBD (*fig.* 12), et cherchons la valeur de l'aire supplémentaire σ'.

On a d'abord, en appliquant la formule entre y_{2m-1} et y_{2m+1},

$$\sigma + \sigma' = \frac{a}{3}(y_{2m-1} + 4y_{2m} + y_{2m+1}).$$

Mais les deux segments paraboliques EGK et GKD sont égaux ; donc

$$\sigma = \sigma' + \text{triangle EMK} = \sigma' + \frac{a}{2}(y_{2m-1} - y_{2m+1}).$$

On a donc

$$2\sigma' = \frac{a}{3}(y_{2m-1} + 4y_{2m} + y_{2m+1}) - \frac{a}{2}(y_{2m-1} - y_{2m+1}),$$

d'où

$$\sigma' = \frac{a}{12}(5y_{2m+1} + 8y_{2m} - y_{2m-1});$$

et la formule de l'aire totale devient, en observant que la somme I

contient maintenant la dernière ordonnée y_{2m+1},

$$A = \frac{a}{3}\left(2P + 4I - y_0 - y_{2m} + \tfrac{5}{4}y_{2m+1} - 4y_{2m+1} + 2y_{2m} - \tfrac{1}{4}y_{2m-1}\right)$$

ou

$$(3) \qquad A = \frac{a}{3}\left(2P + 4I - y_0 - \tfrac{1}{4}y_{2m-1} + y_{2m} - \tfrac{11}{4}y_{2m+1}\right).$$

20. Comparaison entre la première règle de Simpson et la méthode des trapèzes.

Nous allons comparer, au point de vue de l'exactitude obtenue et à nombre égal d'ordonnées ou de divisions, la première méthode de Simpson et celle des trapèzes, ou chercher, autrement dit, quel est le supplément d'exactitude acheté par la plus grande complexité des coefficients de la formule et par la moindre rapidité qui en résulte pour les calculs.

Prenons un nombre pair de divisions et numérotons les ordonnées de o à n.

La surface par la première règle de Simpson est

$$(\alpha) \qquad A_{\text{par}} = \frac{a}{3}(2P + 4I - y_0 - y_n);$$

or cette surface est aussi très sensiblement égale à la surface A′ comprise entre y_1 et y_{n-1} et évaluée par cette même règle, à laquelle on devra ajouter les trapèzes mixtilignes T_0 et T_n compris aux extrémités entre y_0 et y_1, y_{n-1} et y_n; on écrira donc

$$A_{\text{par}} = A'_{\text{par}} + T_0 + T_n = \frac{a}{3}(2I + 4P - y_1 - y_{n-1} - 4y_0 - 4y_n) + T_0 + T_n.$$

Or chaque trapèze mixtiligne se compose d'un trapèze rectiligne et d'un segment. Nous désignerons par $2t_0$ et $2t_n$ les aires de ces deux segments; d'où enfin

$$(\beta)\left\{\begin{aligned} A_{\text{par}} &= \frac{a}{3}(2I + 4P - y_1 - y_{n-1} - 4y_0 - 4y_n) + a\frac{y_0 + y_1}{2} + a\frac{y_{n-1} + y_n}{2} + 2t_0 + 2t_n \\ &= \frac{a}{3}\left(2I + 4P - y_1 - y_{n-1} - 4y_0 - 4y_n + \tfrac{3}{2}y_0 + \tfrac{3}{2}y_1 + \tfrac{3}{2}y_{n-1} + \tfrac{3}{2}y_n\right) + 2t_0 + 2t_n. \end{aligned}\right.$$

Ajoutons les égalités (α) et (β),

$$2A_{\text{par}} = \frac{a}{3}\left(6I + 6P - 5y_0 - 5y_n - y_1 - y_{n-1} + \tfrac{3}{2}y_0 + \tfrac{3}{2}y_n + \tfrac{3}{2}y_1 + \tfrac{3}{2}y_{n-1}\right) + 2t_0 + 2t_n.$$

Comme (α) et (β) présentent le même degré d'approximation, on restera dans les mêmes conditions d'exactitude en prenant la moyenne

$$A_{par} = \frac{a}{6}(6I + 6P) + \frac{a}{6}\left(\tfrac{1}{2}y_1 + \tfrac{1}{2}y_{n-1} - \tfrac{7}{2}y_0 - \tfrac{7}{2}y_n\right) + t_0 + t_n,$$

c'est-à-dire

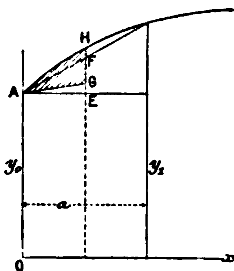
$$A_{par} = A_{trap} + a\frac{y_0}{2} + a\frac{y_n}{2} + \frac{a}{12}(y_1 + y_{n-1}) - \frac{a}{12}(7y_0 + 7y_n) + t_0 + t_n$$

$$= A_{trap} + \frac{a}{12}(y_1 - y_0) + \frac{a}{12}(y_{n-1} - y_n) + t_0 + t_n.$$

La surface A_{trap} obtenue par la méthode des trapèzes est donc inférieure à la surface A_{par} donnée par la première règle de Simpson de deux termes $t_0 + \frac{a}{12}(y_1 - y_0)$ et $t_n + \frac{a}{12}(y_{n-1} - y_n)$.

Or le terme $t_0 + \frac{a}{12}(y_1 - y_0)$ représente le $\frac{1}{2}$ segment initial, plus les $\frac{2}{3}$ de l'aire du triangle AEF, c'est-à-dire le triangle AGF,

Fig. 13.



plus sensiblement l'aire AFH; c'est-à-dire encore, au total, l'aire hachée AGH (*fig.* 13). Le deuxième terme $t_n + \frac{a}{12}(y_{n-1} - y_n)$ représente une aire semblable à l'autre extrémité. Telle est la différence d'exactitude des deux méthodes.

Quand on emploie la formule des trapèzes corrigée, par l'addition de $\frac{a}{16}(y_1 - y_0) + \frac{a}{16}(y_{n-1} - y_n)$, on voit que la différence d'exactitude, à nombre égal d'ordonnées, tombe à deux termes $t_0 + \frac{a}{48}(y_1 - y_0)$ et $t_n + \frac{a}{48}(y_{n-1} - y_n)$ représentant à chaque extrémité AFH $+ \frac{1}{6}$ AEF.

21. Application de la formule de Simpson (première règle) aux courbes et surfaces.

A, aire d'une courbe plane en coordonnées rectangulaires,

$$A = \int_0^{na} y\,dx = \frac{a}{3}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + \ldots + 4y_{n-1} + y_n) = \frac{a}{3} S_0^n(y),$$

en employant le signe symbolique $S_0^n(y)$ pour représenter la parenthèse.

A′, aire d'une courbe plane en coordonnées polaires,

$$A' = \frac{1}{2}\int_0^{n\omega_a} \rho^2 d\omega = \frac{1}{6}\omega_a(\rho_0^2 + 4\rho_1^2 + 2\rho_2^2 + \ldots + 4\rho_{n-1}^2 + \rho_n^2) = \frac{\omega_a}{6} S_0^n(\rho^2).$$

M_{ox}, moment de l'aire A par rapport à l'axe Ox,

$$M_{ox} = \frac{1}{2}\int_0^{na} y^2 dx = \frac{1}{6} a(y_0^2 + 4y_1^2 + 2y_2^2 + \ldots + 4y_{n-1}^2 + y_n^2) = \frac{a}{6} S_0^n(y^2).$$

M_{oy}, moment de l'aire A par rapport à l'axe Oy,

$$M_{oy} = \int_0^{na} xy\,dx = \frac{a^2}{3}[y_0.0 + 4y_1.1 + 2y_2.2 + \ldots$$
$$+ 4y_{n-1}.(n-1) + y^n.n] = \frac{a^2}{3} S_0^n(ky),$$

en désignant par k le nombre entier de 0 à n qui définit le rang de l'ordonnée.

I_{ox}, moment d'inertie de l'aire A par rapport à l'axe Ox,

$$I_{ox} = \int_0^{na} \frac{y^3}{3} dx = \frac{a}{9}(y_0^3 + 4y_1^3 + 2y_2^3 + \ldots + 4y_{n-1}^3 + y_n^3) = \frac{a}{9} S_0^n(y^3).$$

I_{oy}, moment d'inertie de l'aire A par rapport à l'axe Oy,

$$I_{oy} = \int_0^{na} x^2 y\,dx = \frac{a^3}{3}[y_0.0^2 + 4y_1.1^2 + 2y_2.2^2 + \ldots$$
$$+ 4y_{n-1}.(n-1)^2 + y_n.n^2] = \frac{a^3}{3} S_0^n(k^2y).$$

P_{oxy}, moment-produit d'inertie de l'aire A par rapport aux axes

Ox et Oy,

$$P_{oxy} = \int_0^{na} \frac{xy^2}{2}\, dx = \frac{a^2}{2}\, S_0^n(ky^2).$$

Q, volume limité par une surface gauche et cinq plans orthogonaux,

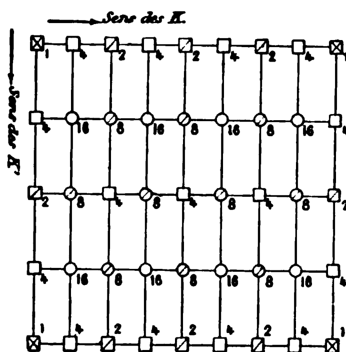
$$Q = \int_0^{mb} A\, dy = \int_0^{mb}\int_0^{na} z\, dx\, dy$$
$$= \int_0^{mb} dy\, \frac{a}{3}\,(z_0 + 4z_1 + 2z_2 + \ldots + 4z_{n-1} + z_n)_k$$
$$= \frac{ab}{9}\,\big[(z_0 + 4z_1 + 2z_2 + \ldots + z_n)_0 + 4(z'_0 + 4z'_1 + 2z'_2 + \ldots + z'_n)_1$$
$$+ 2(z''_0 + 4z''_1 + 2z''_2 + \ldots + z''_n)_2 + \ldots + (z_0^{(m)} + 4z_1^{(m)} + \ldots + z_n^{(m)})_n\big]$$
$$= \frac{ab}{9}\,\big(\; z_0 + 4z'_0 + 2z''_0 + 4z'''_0 + \ldots + z_0^{(m)}$$
$$+ 4z_1 + 16z'_1 + 8z''_1 + 16z'''_1 + \ldots + 4z_1^{(m)}$$
$$+ 2z_2 + 8z'_2 + 4z''_2 + 8z'''_2 + \ldots + 2z_2^{(m)}$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+ z_n + 4z'_n + 2z''_n + 4z'''_n + \ldots + z_n^{(m)}\big);$$

ce qu'on peut écrire symboliquement,

$$Q = \frac{ab}{9}\, S_0^n S_0^m(z),$$

le symbole $S_0^n S_0^m$ désignant la somme des ordonnées de la surface dont les pieds aboutissent aux points d'intersection du qua-

Fig. 14.



drillage formé sur le plan horizontal, entre les limites d'intégration, par les traces des sections verticales distantes de a et de b, avec

cette condition que chaque ordonnée soit respectivement multipliée par le facteur inscrit au pied de cette ordonnée (*fig.* 14). On voit d'ailleurs facilement la loi de formation du tableau des facteurs.

M_{oxy}, M_{oyz}, M_{oxz}, moments du volume Q par rapport aux plans des xy, des yz et des xz,

$$M_{oxy} = \int_0^{na}\int_0^{mb} \frac{z^2}{2}\,dx\,dy = \frac{ab}{18}\,S_0^n S_0^m (z^2);$$

$$M_{oyz} = \int_0^{na}\int_0^{mb} zx\,dx\,dy = \frac{ab}{9}\,S_0^n S_0^m (zx) = \frac{a^2 b}{9}\,S_0^n S_0^m (kz),$$

en désignant par k le nombre entier de o à n définissant le rang de la section perpendiculaire à Ox;

$$M_{ozx} = \int_0^{na}\int_0^{mb} zy\,dx\,dy = \frac{ab}{9}\,S_0^n S_0^m (zy) = \frac{ab^2}{9}\,S_0^n S_0^m (k'z),$$

en désignant par k' le nombre entier de o à n définissant le rang de la section perpendiculaire à Oy.

22. Seconde règle de Simpson. — Parabole cubique.

Faisons $k = 3$ dans la formule générale, ce qui nous conduira à prendre, pour le nombre des intervalles, un multiple de 3.

L'expression de l'aire élémentaire ($u^{\text{ième}}$ groupe) est ici

$$\begin{aligned} A_{(u-1)3a}^{u3a} &= \frac{\alpha_u}{4}[u^4 3^4 a^4 - (u-1)^4 3^4 a^4] + \frac{\beta_u}{3}[u^3 3^3 a^3 - (u-1)^3 3^3 a^3] \\ &\quad + \frac{\gamma_u}{2}[u^2 3^2 a^2 - (u-1)^2 3^2 a^2] + \delta_u[u3a - (u-1)3a] \\ &= \frac{\alpha_u}{4} 3^4 a^4(+4u^3 - 6u^2 + 4u - 1) + \frac{\beta_u}{3} 3^3 a^3(3u^2 - 3u + 1) \\ &\quad + \frac{\gamma_u}{2} 3^2 a^2(2u - 1) + \delta_u 3a. \end{aligned}$$

Or les paramètres sont donnés par le système (A) ci-après

$$(A)\quad \begin{cases} y_0 = \alpha_u(3u-3)^3 a^3 + \beta_u(3u-3)^2 a^2 + \gamma_u(3u-3)a + \delta_u, \\ y_1 = \alpha_u(3u-2)^3 a^3 + \beta_u(3u-2)^2 a^2 + \gamma_u(3u-2)a + \delta_u, \\ y_2 = \alpha_u(3u-1)^3 a^3 + \beta_u(3u-1)^2 a^2 + \gamma_u(3u-1)a + \delta_u, \\ y_3 = \alpha_u(3u)^3 a^3 + \beta_u(3u)^2 a^2 + \gamma_u 3ua + \delta_u; \end{cases}$$

d'où l'on tire les coefficients α_u, β_u, γ_u, δ_u par :

$$(B)\quad \begin{cases} 6\alpha_u a^3 = y_3 - 3y_2 + 3y_1 - y_0, \\ 2\beta_u a^2 = 2y_3 - 5y_2 + 4y_1 - y_0 - 3u(y_3 - 3y_2 + 3y_1 - y_0), \\ 6\gamma_u a = 11y_3 - 18y_2 + 9y_1 - 2y_0 \\ \qquad - 18u(2y_3 - 5y_2 + 4y_1 - y_0) + 27u^2(y_3 - 3y_2 + 3y_1 - y_0), \\ 2\delta_u = 2y_3 - u(11y_3 - 18y_2 + 9y_1 - 2y_0) \\ \qquad + 9u^2(2y_3 - 5y_2 + 4y_1 - y_0) - 9u^3(y_3 - 3y_2 + 3y_1 - y_0). \end{cases}$$

En effet, la dernière équation du système (A) donne

$$(1)\qquad \delta_u = y_3 - \alpha_u a^3(3u)^3 - \beta_u a^2(3u)^2 - \gamma_u a(3u);$$

d'où

$$\begin{aligned} y_3 - y_0 &= 27\alpha_u a^3(3u^2 - 3u + 1) + 9\beta_u a^2(2u - 1) + 3\gamma_u a, \\ y_3 - y_1 &= 2\alpha_u a^3(27u^2 - 18u + 4) + 4\beta_u a^2(3u - 1) + 2\gamma_u a, \\ y_3 - y_2 &= \alpha_u a^3(27u^2 - 9u + 1) + \beta_u a^2(6u - 1) + \gamma_u a. \end{aligned}$$

Cette dernière donne

$$(2)\qquad \gamma_u a = y_3 - y_2 - \alpha_u a^3(27u^2 - 9u + 1) - \beta_u a^2(6u - 1):$$

d'où

$$\begin{aligned} 2y_3 - 3y_2 + y_0 &= 6\alpha_u a^3(9u - 4) + 6\beta_u a^2, \\ y_3 - 2y_2 + y_1 &= 6\alpha_u a^3(3u - 1) + 2\beta_u a^2. \end{aligned}$$

Cette dernière donne

$$(3)\qquad 2\beta_u a^2 = y_3 - 2y_2 + y_1 - 6\alpha_u a^3(3u - 1);$$

d'où

$$(4)\qquad 6\alpha_u a^3 = y_3 - 3y_2 + 3y_1 - y_0,$$

et, en remontant de (4) à (3), (2) et (1), on obtient le système (B) des paramètres, que nous avons indiqué plus haut.

Substituons maintenant aux paramètres α_u, β_u, γ_u, δ_u leurs valeurs tirées de (B) dans l'expression de l'aire; il restera

$$A_{(u-1)3a}^{u3a} = \frac{3a}{8}(y_3 + 3y_2 + 3y_1 + y_0).$$

Il reste à faire varier u de 1 à m et à effectuer la somme des aires, ce qui donne

$$A_0^{3a} = \frac{3a}{8}(y_0 + 3y_1 + 3y_2 + y_3),$$

$$A_{3a}^{6a} = \frac{3a}{8}(y_3 + 3y_4 + 3y_5 + y_6),$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$

$$A_{(m-1)3a}^{m3a} = \frac{3a}{8}(y_{3m-3} + 3y_{3m-2} + 3y_{3m-1} + y_{3m});$$

d'où, pour la somme A,

$$A = \tfrac{3}{8}a[2S_{3k} + 3S_{3k+1} + 3S_{3k+2} - (y_0 + y_{3m})],$$

en désignant par S_{3k+1}, par exemple, la somme d'ordonnées des rangs marqués par $3k+1$, où k est un entier variant de o à m.

23. Application de la formule de Simpson (deuxième règle) aux courbes et surfaces.

A, aire d'une courbe plane en coordonnées rectangulaires,

$$\begin{aligned} A = \int_0^{na} y\,dx = \frac{3a}{8}(y_0 &+ 3y_1 + 3y_2 + 2y_3 + 3y_4 \\ &+ 3y_5 + 2y_6 + \ldots + 2y_{3m-3} + 3y_{3m-2} + 3y_{3m-1} + y_{3m}) \\ = \frac{3a}{8} S_0^n(y), \end{aligned}$$

en employant le signe symbolique $S_0^n(y)$ pour désigner la parenthèse.

A′, aire d'une courbe plane en coordonnées polaires,

$$A' = \frac{1}{2}\int^{n\omega_a} \rho^2 d\omega = \frac{3\omega_a}{16}(\rho_0^2 + 3\rho_1^2 + 3\rho_2^2 + 2\rho_3^2 + \ldots + \rho_n^2) = \frac{3\omega_a}{16} S_0^n(\rho^2).$$

M_{ox}, moment de l'aire A par rapport à l'axe Ox,

$$M_{ox} = \frac{1}{2}\int_0^{na} y^2 dx = \frac{3a}{16}(y_0^2 + 3y_1^2 + 3y_2^2 + 2y_3^2 + \ldots + y_n^2) = \frac{3a}{16} S_0^n(y^2).$$

M_{oy}, moment de l'aire A par rapport à l'axe Oy,

$$\begin{aligned} M_{oy} = \int_0^{na} xy\,dx &= \frac{3a^2}{8}(y_0.\text{o} + 3y_1.1 + 3y_2.2 + 2y_3.3 + \ldots + y_n.n) \\ &= \frac{3a^2}{8} S_0^n(ky), \end{aligned}$$

en désignant ici par k le nombre entier, de o à n, qui définit le rang de l'ordonnée.

I_{ox}, moment d'inertie de l'aire A par rapport à l'axe Ox,

$$I_{ox} = \frac{1}{3}\int_0^{na} y^3 dx = \frac{a}{8}(y_0^3 + 3y_1^3 + 3y_2^3 + 3y_3^3 + \ldots\ \ y_n^3) = \frac{a}{8} S_0^n(y^3).$$

I_{oy}, moment d'inertie de l'aire A par rapport à l'axe Oy,

$$I_{oy} = \int_0^{na} x^2 y\, dx = \frac{3a^3}{8}(y_0 . 0^2 + 3y_1 . 1^2 + 3y_2 . 2^2 + 2y_3 . 3^2 + \ldots + y_n . n^2)$$
$$= \frac{3a^3}{8} S_0^n(k^2 y).$$

P_{oxy}, moment-produit d'inertie de l'aire A par rapport aux axes Ox et Oy,

$$P_{oxy} = \int_0^{na} \frac{xy^2}{2}\, dx = \frac{3a^2}{8} S_0^n(ky^2).$$

Q, volume limité par une surface gauche et cinq plans orthogonaux,

$$Q = \int_0^{mb} A\, dy = \int_0^{mb}\int_0^{na} z\, dx\, dy$$
$$= \int_0^{mb} dy \frac{3a}{8}(z_0 + 3z_1 + 3z_2 + 2z_3 + \ldots + z_n)_k$$
$$\begin{aligned} = \frac{3b}{8}\frac{3a}{8}\big[& (z_0 + 3z_1 + 3z_2 + 2z_3 + \ldots + z_n)_0 \\ & + 3(z'_0 + 3z'_1 + 3z'_2 + 2z'_3 + \ldots + z'_n)_1 \\ & + 3(z''_0 + 3z''_1 + 3z''_2 + 2z''_3 + \ldots + z''_n)_2 \\ & + 2(z'''_0 + 3z'''_1 + 3z'''_2 + 2z'''_3 + \ldots + z'''_n)_3 \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + (z_0^{(m)} + 3z_1^{(m)} + 3z_2^{(m)} + 2z_3^{(m)} + \ldots + z_n^{(m)})_m\big]; \end{aligned}$$

$$Q = \frac{9}{64} ab \left| \begin{array}{l} z_0 + 3z'_0 + 3z''_0 + 2z'''_0 + \ldots + z_0^{(m)} \\ + 3z_1 + 9z'_1 + 9z''_1 + 6z'''_1 + \ldots + 3z_1^{(m)} \\ + 3z_2 + 9z'_2 + 9z''_2 + 6z'''_2 + \ldots + 3z_2^{(m)} \\ + 2z_3 + 6z'_3 + 6z''_3 + 4z'''_3 + \ldots + 2z_3^{(m)} \\ + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ + z_n + 3z'_n + 3z''_n + 2z'''_n + \ldots + z_n^{(m)} \end{array} \right|$$

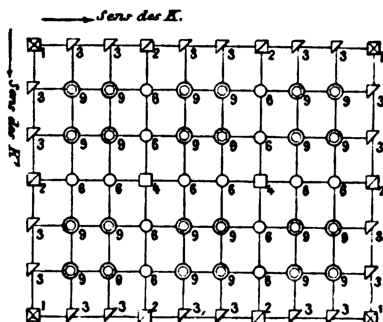
ou, symboliquement,

$$Q = \frac{9}{64} ab\, S_0^n\, S_0^m(z),$$

le symbole $S_0^n S_0^m$ désignant la somme des ordonnées de la surface dont les pieds aboutissent aux points d'intersection du quadrillage formé, sur le plan horizontal, entre les limites d'intégration, par les traces des sections verticales distantes de a et de b, avec cette

condition que chaque ordonnée soit respectivement multipliée par le facteur inscrit au pied de cette ordonnée (*fig.* 15).

Fig. 15.



24. Emploi de paraboles de degrés plus élevés que le troisième.

Par la méthode ci-dessus décrite et en modifiant seulement le degré de la parabole employée, on trouverait, pour l'aire élémentaire, les formules ci-après :

Parabole du quatrième degré,

$$A_{(u-1)4a}^{u4a} = \frac{2a}{45}(7y_0 + 32y_1 + 12y_2 + 32y_3 + 7y_4);$$

Parabole du cinquième degré,

$$A_{(u-1)5a}^{u5a} = \frac{5a}{288}(19y_0 + 75y_1 + 50y_2 + 50y_3 + 75y_4 + 19y_5);$$

Parabole du sixième degré,

$$A_{(u-1)6a}^{u6a} = \frac{a}{140}(41y_0 + 216y_1 + 27y_2 + 27y_3 + 27y_4 + 216y_5 + 41y_6).$$

Chacune de ces formules conduirait à un Tableau de facteurs différent, et d'ailleurs facile à former, pour l'intégration double.

MÉTHODE DU DOCTEUR WOOLLEY.

25. Intégration double.

La formule de Woolley donne la valeur approximative du volume Q, limité par une surface gauche et cinq plans orthogo-

naux. Le plan horizontal étant divisé par deux séries de parallèles (équidistantes de a et de b et donnant dans chaque série un nombre pair d'intervalles), le solide peut être décomposé en éléments ayant pour base un rectangle, de longueur $2a$ et de largeur $2b$, c'est-à-dire quatre petits rectangles, de longueur a et de largeur b, dont les sommets donnent neuf points, pieds de neuf ordonnées de longueur connue, ou projections de neuf points connus de la surface gauche proposée. Woolley remplace alors la portion de surface gauche intérieure à l'élément par deux portions de paraboloïdes du deuxième degré à axe vertical : le premier, passant par les points connus de la surface qui se projettent sur la moitié de la base (limitée à une diagonale); le second, passant par ceux qui se projettent sur l'autre moitié.

Ces paraboloïdes, dont l'équation générale est

$$z = \alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma xy + \varepsilon x + \eta y + \lambda,$$

sont déterminés chacun par les six points qui se projettent sur les demi-rectangles (en comptant deux fois le point P de la diagonale, on a, en effet, douze pieds d'ordonnées dans la base élémentaire).

Or on sait que le volume d'un paraboloïde droit, ayant pour

Fig. 16.

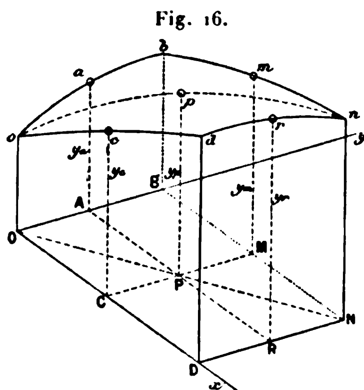
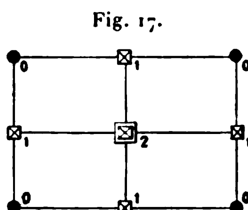


Fig. 17.



base un triangle rectangle dont deux côtés, de longueurs $2a$ et $2b$, sont parallèles aux axes Ox et Oy, est égal au produit ab des moitiés de ces côtés multiplié par les $\frac{2}{3}$ de la somme des ordonnées élevées au milieu des trois côtés. On pourra donc écrire

$$q_1 = \tfrac{2}{3}ab(y_a + y_m + y_p)$$

et

$$q_2 = \tfrac{2}{3}ab(y_r + y_c + y_p)$$

ou

$$Q = q_1 + q_2 = \tfrac{2}{3}ab(y_a + y_m + y_r + y_c + 2y_p).$$

Si donc on marque sur le plan horizontal, à côté du pied de chaque ordonnée comprise dans la base élémentaire, le Tableau de facteurs de la *fig.* 17 ci-contre, on pourra écrire symboliquement, comme nous l'avons fait déjà maintes fois, pour le volume élémentaire

$$Q = \tfrac{2}{3}\,ab\,\mathfrak{S}_0^2\,\mathfrak{S}_0^2(z),$$

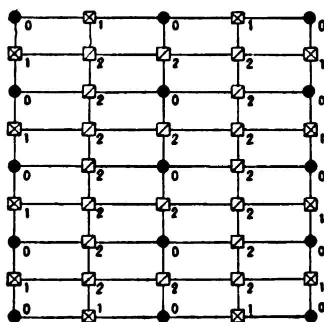
le signe $\mathfrak{S}_0^2\,\mathfrak{S}_0^2$ comportant l'emploi du Tableau de facteurs de la *fig.* 17.

On généralisera ensuite, pour passer du volume élémentaire à un volume quelconque, et l'on trouvera facilement le Tableau de facteurs correspondant; c'est celui de la *fig.* 18. On écrira alors

$$Q = \tfrac{2}{3}\,ab\,\mathfrak{S}_0^n\,\mathfrak{S}_0^m(z).$$

En se reportant aux Tableaux de facteurs caractéristiques de l'intégration double par les autres méthodes [$\Sigma_0^n\Sigma_0^m(z)$ pour les trapèzes, $\mathrm{S}_0^n\mathrm{S}_0^m(z)$ pour la première règle de Simpson, $S_0^n S_0^m(z)$

Fig. 18.



pour la deuxième règle de Simpson], on voit que la méthode Woolley, qui soustrait au calcul un grand nombre d'ordonnées, est beaucoup plus rapide.

Il est curieux de remarquer qu'en faisant sortir le facteur 2 du Tableau de Woolley pour le reporter dans le multiplicateur constant, qui devient alors $\frac{4}{3}ab$, les Tableaux de Woolley et de la

méthode des trapèzes ne diffèrent plus que par l'annulation, dans le premier, d'un certain nombre de facteurs. En d'autres termes, à exactitude sensiblement égale, on peut supprimer dans la méthode des trapèzes un certain nombre d'ordonnées régulièrement réparties, à condition d'augmenter d'un tiers chacune des ordonnées restantes. Il est par ailleurs facile de voir que le rapport α du nombre des ordonnées employées dans la méthode Woolley au nombre de celles employées dans la méthode des trapèzes s'exprime par la formule générale

$$\alpha = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\,\frac{mn - 2}{mn + m + n + 1}.$$

26. Application de la méthode Woolley à l'évaluation de l'aire des surfaces gauches.

L'aire élémentaire a pour expression, en désignant par θ l'angle de la normale à la surface avec l'axe Oz,

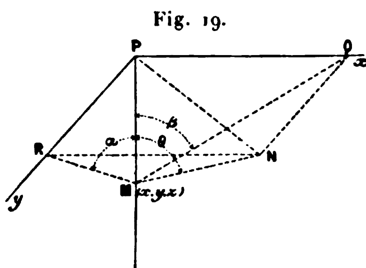
$$d\sigma = \frac{dx\,dy}{\cos\theta} = dx\,dy\,\text{séc}\,\theta.$$

Si donc on construit une surface auxiliaire, ayant en chaque point xy de la base une ordonnée $\zeta = k\,\text{séc}\,\theta$, l'aire cherchée σ sera égale au volume

$$\frac{1}{k}\int\!\!\int \zeta\,dx\,dy = \frac{1}{k}\,\frac{2}{3}\,ab\,\mathbf{S}_0^n\,\mathbf{S}_0^m(\zeta).$$

On aura donc à former le Tableau de Woolley et à chercher les valeurs de sécθ qui correspondent aux seuls points de la base à facteurs significatifs.

Fig. 19.



En particulier, pour trouver l'aire d'une demi-carène, on prendra la flottaison pour plan des xy et l'on cherchera, aux points vou-

lus, l'angle θ de la normale avec Oz, au moyen des angles avec Oz des normales aux couples, aux lignes d'eau et aux sections longitudinales, angles qu'on relève immédiatement sur les plans. Soient alors, en un point (x, y, z), α l'angle de la normale au couple avec Oz, $90°$ l'angle de la normale à la ligne d'eau avec Oz, et β l'angle de la normale à la section longitudinale avec Oz : on a, en prenant $MN = 1$ (*fig.* 19),

$$NP = \sin\theta, \qquad \operatorname{tang}\alpha = \frac{RP}{MP}, \qquad \operatorname{tang}\beta = \frac{PQ}{MP};$$

$$MP = \cos\theta, \qquad \operatorname{tang}^2\alpha + \operatorname{tang}^2\beta = \frac{\overline{RP}^2 + \overline{PQ}^2}{\overline{MP}^2} = \frac{\overline{NP}^2}{\overline{MP}^2} = \operatorname{tang}^2\theta.$$

Or

$$\operatorname{séc}\theta = \sqrt{1 + \operatorname{tang}^2\theta} = \sqrt{1 + \operatorname{tang}^2\alpha + \operatorname{tang}^2\beta}.$$

Il suffira donc de relever la valeur de $\sqrt{1 + \operatorname{tang}^2\alpha + \operatorname{tang}^2\beta}$ pour les points de la carène, dont le pied de l'ordonnée correspond à un facteur significatif du Tableau de Woolley.

MÉTHODE DES DIFFÉRENCES.

27. Intégration simple.

Soit une courbe quelconque $y = f(x)$, finie et continue entre les abscisses α et β. Dans cet intervalle, l'ordonnée y sera donnée par la formule de Taylor,

$$(1)\quad \begin{cases} y = y_\alpha + \dfrac{x-\alpha}{1}\left(\dfrac{dy}{dx}\right)_\alpha + \dfrac{(x-\alpha)^2}{1.2}\left(\dfrac{d^2y}{dx^2}\right)_\alpha + \ldots \\ \quad + \dfrac{(x-\alpha)^m}{1.2\ldots m}\left(\dfrac{d^my}{dx^m}\right)_\alpha + \dfrac{(x-\alpha)^{m+1}}{1.2\ldots m+1}\left(\dfrac{d^{m+1}y}{dx^{m+1}}\right)_{\alpha+\theta x}, \end{cases}$$

en écrivant le reste sous la forme de Lagrange.

Si, en particulier, la première abscisse α est nulle, on a la série de Maclaurin,

$$(2)\quad \begin{cases} y = y_0 + \dfrac{x}{1}\left(\dfrac{dy}{dx}\right)_0 + \dfrac{x^2}{1.2}\left(\dfrac{d^2y}{dx^2}\right)_0 + \ldots \\ \quad + \dfrac{x^m}{1.2\ldots m}\left(\dfrac{d^my}{dx^m}\right)_0 + \dfrac{x^{m+1}}{1.2\ldots m+1}\left(\dfrac{d^{m+1}y}{dx^{m+1}}\right)_{\theta x}. \end{cases}$$

Négliger le reste, comme on le fait d'habitude, revient à assimiler la courbe proposée à une parabole de degré m, laquelle est alors déterminée si on l'assujettit à avoir avec la courbe réelle $m + 1$ points communs, ou encore un point commun (à l'origine

par exemple), et les m dérivées successives en ce point communes.

Donnons-nous d'abord $m+1$ points de la courbe, y_0, y_a, y_{2a}, ..., y_{ma}. Il est clair qu'on peut déduire la connaissance des m dérivées successives à l'origine de celle des $m+1$ points : on a, en effet,

$$(a)\quad \left\{\begin{aligned} y_a &= y_0 + \frac{a}{1}\left(\frac{dy}{dx}\right)_0 + \frac{a^2}{1.2}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_0 + \ldots + \frac{a^m}{1.2\ldots m}\left(\frac{d^my}{dx^m}\right)_0, \\ y_{2a} &= y_0 + \frac{2a}{1}\left(\frac{dy}{dx}\right)_0 + \frac{2^2a^2}{1.2}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_0 + \ldots + \frac{2^m a^m}{1.2\ldots m}\left(\frac{d^my}{dx^m}\right)_0, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_{ma} &= y_0 + \frac{ma}{1}\left(\frac{dy}{dx}\right)_0 + \frac{m^2a^2}{1.2}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_0 + \ldots + \frac{m^m a^m}{1.2\ldots m}\left(\frac{d^my}{dx^m}\right)_0. \end{aligned}\right.$$

De ce système de m équations du premier degré à m inconnues, on tire les m dérivées successives qui, portées dans (2), donneront l'équation générale de l'ordonnée y. On reconnaît là la méthode des paraboles de Simpson. Mais on peut aussi (ce qui revient exactement au même) calculer les dérivées successives à l'origine, non plus au moyen des $m+1$ ordonnées connues, mais au moyen des fonctions de ces $m+1$ ordonnées qu'on appelle les *différences successives de* y_0.

On a, en effet,

Ordonnées.	Premières différences.
y_0	$\Delta y_0 = y_a - y_0$
y_a	$\Delta y_a = y_{2a} - y_a$
y_{2a}	$\Delta y_{2a} = y_{3a} - y_{2a}$
....	....
$y_{(m-3)a}$	....
$y_{(m-2)a}$	....
$y_{(m-1)a}$	$\Delta y_{(m-1)a} = y_{ma} - y_{(m-1)a}$
y_{ma}	....

Ordonnées.	Deuxièmes différences.
y_0	$\Delta^2 y_0 = \Delta y_a - \Delta y_0 = y_{2a} - 2y_a + y_0$
y_a	$\Delta^2 y_a = \Delta y_{2a} - \Delta y_a = y_{3a} - 2y_{2a} + y_a$
y_{2a}	....
....	....
$y_{(m-3)a}$	....
$y_{(m-2)a}$	$\Delta^2 y_{(m-2)a} = \Delta y_{(m-1)a} - \Delta y_{(m-2)a} = y_{ma} - 2y_{(m-1)a} + y_{(m-2)a}$
$y_{(m-1)a}$	....
y_{ma}	....

Ordonnées.	Troisièmes différences.
y_0	$\Delta^3 y_0 = \Delta^2 y_a - \Delta^2 y_0 = y_{3a} - 3y_{2a} + 3y_a - y_0$
y_a	$\Delta^3 y_a = \Delta^2 y_{2a} - \Delta^2 y_a = y_{4a} - 3y_{3a} + 3y_{2a} - y_a$
y_{2a}	....
....	....
$y_{(m-3)a}$ ...	$\Delta^3 y_{(m-3)a} = \Delta^2 y_{(m-2)a} - \Delta^2 y_{(m-3)a} = y_{ma} - 3y_{(m-1)a} + 3y_{(m-2)a} - y_{(m-3)a}$
$y_{(m-2)a}$	....
$y_{(m-1)a}$	....
y_{ma}	....

Or, du système (a), on tire, par soustraction,

$$(b)\quad\begin{cases}
\Delta y_0 = \dfrac{a}{1}\left(\dfrac{dy}{dx}\right)_0 + \dfrac{a^2}{1.2}\left(\dfrac{d^2y}{dx^2}\right)_0 + \ldots + \dfrac{a^m}{1.2\ldots m}\left(\dfrac{d^my}{dx^m}\right)_0, \\
\Delta y_a = \dfrac{a}{1}\left(\dfrac{dy}{dx}\right)_0 + \dfrac{a^2}{1.2}(2^2-1^2)\left(\dfrac{d^2y}{dx^2}\right)_0 + \ldots + \dfrac{a^m}{1.2\ldots m}(2^m-1^m)\left(\dfrac{d^my}{dx^m}\right)_0, \\
\Delta y_{2a} = \dfrac{a}{1}\left(\dfrac{dy}{dx}\right)_0 + \dfrac{a^2}{1.2}(3^2-2^2)\left(\dfrac{d^2y}{dx^2}\right)_0 + \ldots + \dfrac{a^m}{1.2\ldots m}(3^m-2^m)\left(\dfrac{d^my}{dx^m}\right)_0, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\Delta y_{(m-1)a} = \dfrac{a}{1}\left(\dfrac{dy}{dx}\right)_0 + \dfrac{a^2}{1.2}[m^2-(m-1)^2]\left(\dfrac{d^2y}{dx^2}\right)_0 + \ldots \\
\qquad + \dfrac{a^m}{1.2\ldots m}[m^m-(m-1)^m]\left(\dfrac{d^my}{dx^m}\right)_0.
\end{cases}$$

On tirerait de même, par soustraction, du système (b), un troisième système (c),

$$(c)\quad\begin{cases}
\Delta^2 y_0 = \dfrac{a^2}{1.2}(2^2-2.1^2)\left(\dfrac{d^2y}{dx^2}\right)_0 + \ldots + \dfrac{a^m}{1.2\ldots m}(2^m-2.1^m)\left(\dfrac{d^my}{dx^m}\right)_0, \\
\Delta^2 y_a = \dfrac{a^2}{1.2}(3^2-2.2^2+1^2)\left(\dfrac{d^2y}{dx^2}\right)_0 + \ldots + \dfrac{a^m}{1.2\ldots m}(3^m-2.2^m+1^m)\left(\dfrac{d^my}{dx^m}\right)_0, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\Delta^2 y_{(m-2)a} = \dfrac{a^2}{1.2}[m^2-2(m-1)^2+(m-2)^2]\left(\dfrac{d^2y}{dx^2}\right)_0 + \ldots \\
\qquad + \dfrac{a^m}{1.2\ldots m}[m^m-2(m-1)^m+(m-2)^m]\left(\dfrac{d^my}{dx^m}\right)_0,
\end{cases}$$

et ainsi de suite, jusqu'à la différence $m^{\text{ième}}$ de y_0. Or, les m différences successives de y_0 forment m équations du premier degré à m inconnues (les m dérivées à l'origine), et ce système, enfin résolu et porté dans l'équation de Taylor ou de Maclaurin, donne pour équation générale de l'ordonnée y dans la région finie et

continue considérée sur la courbe,

$$(3)\quad \begin{cases} y = y_\alpha + \dfrac{x-\alpha}{a}\dfrac{\Delta y_\alpha}{1} + \left(\dfrac{x-\alpha}{a}\right)\left(\dfrac{x-\alpha}{a}-1\right)\dfrac{\Delta^2 y_\alpha}{1.2} \\ \qquad + \left(\dfrac{x-\alpha}{a}\right)\left(\dfrac{x-\alpha}{a}-1\right)\left(\dfrac{x-\alpha}{a}-2\right)\dfrac{\Delta^3 y_\alpha}{1.2.3} + \ldots \end{cases}$$

La formule (3) à laquelle nous arrivons n'est autre que la formule d'interpolation de Newton.

En s'arrêtant au terme qui contient la différence première, l'équation (3) représente une droite; à celui qui contient la différence seconde, l'équation représente une parabole du deuxième degré, et ainsi de suite. On retrouve encore ainsi les formules des trapèzes et des paraboles.

28. Remarque sur le calcul approché des moments et des moments d'inertie des aires planes.

Quand nous avons cherché la valeur approchée de l'aire d'une courbe par la méthode des trapèzes, nous avons remplacé la courbe proposée par un contour polygonal; puis, pour évaluer approximativement, par la même méthode, les moments M_{ox} et M_{oy} de cette aire, ce sont les courbes auxiliaires $y' = \frac{1}{k}\cdot\frac{y^2}{2}$ et $y'' = \frac{1}{k}\, xy$ que nous avons remplacées à leur tour par des contours polygonaux, supposant implicitement à chaque fois la courbe proposée remplacée alors par un contour différant de la courbe et différant aussi du contour polygonal.

Or on peut vouloir chercher M_{ox} et M_{oy} sans adopter à chaque fois un nouveau contour pour remplacer la courbe proposée, et en conservant, par exemple, le contour polygonal primitif. Voici comment on peut y arriver.

Recherche de M_{oy}. — Décomposons l'aire en quadrilatères OCDL, LDEK, ... (*fig.* 20), complétés par les deux triangles OBC et IFH des deux extrémités.

Tous les quadrilatères ont leur centre de gravité sur l'ordonnée formant diagonale, car les aires $\frac{a}{2} y_k$ des triangles situés de part et d'autre de cette diagonale sont égales, et leurs centres sont situés à égale distance $\frac{a}{3}$ de cette diagonale. On a donc, pour la

somme des moments par rapport à Oy,

$$M_{oy} = a^2[y_1.1 + y_2.2 + \ldots + y_{n-1}.(n-1)] + \frac{a}{2}y_0\frac{a}{3} + \frac{a}{2}y_n\left(na - \frac{a}{3}\right)$$

$$= a^2\left[\frac{y_0}{2}.0 + y_1.1 + y_2.2 + \ldots + y_{n-1}(n-1) + \frac{y_n}{2}n\right] + \frac{a^2}{6}(y_0 - y_n).$$

La parenthèse représente le moment M'_{oy} mesuré en appliquant la formule des trapèzes à la courbe auxiliaire $y'' = xy$; le terme complémentaire représente la correction due à la nouvelle hypothèse faite sur le contour substitué à la courbe.

Fig. 20.

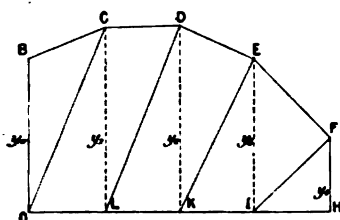
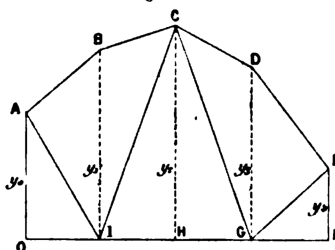


Fig. 21.



Recherche de M_{ox}. — Pour trouver M_{ox}, nous décomposerons l'aire (supposée partagée en un nombre pair d'intervalles) d'une façon différente.

Nous prendrons alternativement des triangles et des quadrilatères en joignant AI, IC, CG, GE (*fig.* 21).

Un triangle, pointe en haut, tel que ICG, a pour aire ay_{2p} et pour moment par rapport à Ox, $ay_{2p}\frac{1}{3}y_{2p}$. Un quadrilatère, pointe en bas, tel que ABCI ou CDEG, a pour aire ay_{2p+1}, et pour moment approximatif par rapport à Ox $ay_{2p+1}.\frac{2}{3}y_{2p+1}$; d'où

$$M_{ox} = \frac{a}{3}[2y_1^2 + y_2^2 + 2y_3^2 + y_4^2 + \ldots + 2y_{2n-1}^2] + \frac{a}{2}y_0\frac{1}{3}y_0 + \frac{a}{2}y_{2n}.\frac{1}{3}y_{2n}$$

$$= \frac{a}{3}\left(\frac{1}{2}y_0^2 + 2y_1^2 + y_2^2 + 2y_3^2 + \ldots + y_{n-2}^2 + 2y_{n-1}^2 + \frac{1}{2}y_{2n}^2\right).$$

Pour les moments d'inertie, on opérerait semblablement, en partant d'un contour primitif polygonal, mais les calculs seraient encore plus compliqués, et il est préférable de recourir aux courbes auxiliaires polygonales, c'est-à-dire de substituer à chaque fois un nouveau contour à la courbe proposée.

CHAPITRE III.

COURBES DIFFÉRENTIELLES ET INTÉGRALES.

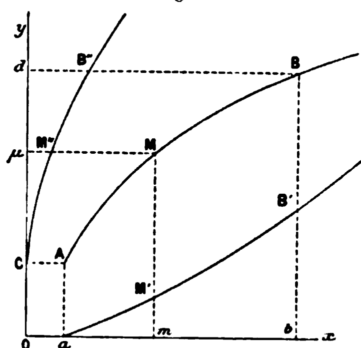
29. Définitions.

Les courbes différentielles et intégrales, depuis longtemps enseignées dans les Cours de l'École d'application du Génie maritime, ont été appliquées, il y a plus de quarante ans, aux divers problèmes de la *Théorie du navire,* par l'ingénieur de la Marine Rossin.

Soit (*fig.* 22) une courbe AMB d'équation $y = f(x)$. Son aire A de a à b est donnée par

$$A = \int_a^b f(x)\,dx = F(x) = ky',$$

Fig. 22.



en désignant par k une longueur constante arbitrairement choisie pour rendre l'équation homogène. On aura ainsi

$$\text{aire}\, a\text{AM}m = F(x) = ky'.$$

Portons donc $\overline{mM'} = y'$ à l'abscisse m, d'ailleurs quelconque.

La courbe aM′B′ sera une *courbe intégrale directe du premier ordre de la proposée*. Il y a autant de ces courbes que d'échelles k; la courbe particulière n'est déterminée dans le faisceau que si l'échelle k l'a été elle-même; par exemple, si l'on a fait $k = 1$.

Considérons maintenant l'aire

$$A' = \int_c^d x\,dy = F_1(y) = k x',$$

en faisant usage de la même échelle k que tout à l'heure. Portons $\mu M'' = x'$ à l'ordonnée y, d'ailleurs quelconque. La courbe CM″B″ sera une *courbe intégrale complémentaire du premier ordre de la proposée*.

Les deux courbes intégrales du premier ordre, à même échelle, d'une courbe donnée sont reliées entre elles par la relation

$$\begin{aligned} y' + x' &= \frac{1}{k}\left[\int_a^x y\,dx + \int_c^y x\,dy\right] \\ &= \frac{1}{k}\left[\int_a^x y\,dx + (xy)_{ac}^{xy} - \int_a^x y\,dx\right] = \frac{1}{k}(xy - ac). \end{aligned}$$

La courbe proposée AMB est dite *courbe différentielle du premier ordre* de l'une quelconque des courbes intégrales CM″B″ et aM′B′.

En opérant sur les courbes intégrales du premier ordre, directe et complémentaire, d'une même échelle k, de la même façon, on obtient de nouvelles courbes auxquelles on donne le nom de *courbes intégrales du second ordre* et qui seront au nombre de quatre, pour une même échelle.

On conçoit de même des courbes intégrales du troisième ordre, et ainsi de suite.

30. Propriétés des courbes intégrales du premier ordre.

Théorème I. — *Le coefficient angulaire de la courbe intégrale directe du premier ordre est proportionnel à l'ordonnée de la proposée; celui de l'intégrale complémentaire est proportionnel à l'abscisse de la proposée.*

En effet, pour définir l'ordonnée y_1 de la courbe intégrale di-

recte et l'abscisse x_1 de l'intégrale complémentaire, on a

$$k y_1 = \int_{x_0}^{x} y\,dx \qquad \text{et} \qquad k' x_1 = \int_{y_0}^{y} x\,dy;$$

d'où

$$k\,dy_1 = y\,dx \qquad \text{et} \qquad k'\,dx_1 = x\,dy;$$

d'où enfin

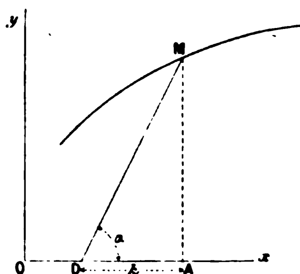
$$k\frac{dy_1}{dx} = y,$$

et de même, pour l'intégrale complémentaire,

$$k'\frac{dx_1}{dy} = x.$$

Théorème II. — *Si, à partir de l'abscisse x, on porte en* AD *(fig. 23) la longueur de l'échelle k dans le sens des x néga-*

Fig. 23.



tifs, la droite qui joint le point M, *d'abscisse x, de la proposée au point* D, *est parallèle à la tangente à la courbe intégrale directe du premier ordre au point de même abscisse x.*

En effet,

$$k\frac{dy_1}{dx} = y.$$

Or dans le triangle DAM (*fig.* 23), en appelant α l'angle en D, on a

$$\text{AD}\tang\alpha = \text{AM} \qquad \text{ou} \qquad k\tang\alpha = y;$$

donc

$$\tang\alpha = \frac{dy_1}{dx}.$$

Théorème III. — *Le rayon de courbure de la courbe intégrale*

directe du premier ordre est lié à l'ordonnée et au coefficient angulaire de la proposée par la relation $\rho_1 = \dfrac{(k^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}{k^2\dfrac{dy}{dx}}$.

En effet,

$$\rho_1 = \frac{\left[1+\left(\dfrac{dy_1}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\dfrac{d^2y_1}{dx^2}}; \qquad \text{or} \qquad \frac{dy_1}{dx} = \frac{y}{k} \qquad \text{et} \qquad \frac{d^2y_1}{dx^2} = \frac{1}{k}\,\frac{dy}{dx}.$$

THÉORÈME IV. — *La courbe intégrale directe du premier ordre d'une droite parallèle à l'axe des x est une droite inclinée passant par l'origine et coupant la droite proposée en un point M ayant pour abscisse l'échelle k.*

En effet, on a alors

$$\int_0^x y\,dx = y\int^x dx = xy$$

et, d'autre part,

$$xy = k y_1.$$

Donc, pour $x = k$,

$$y_1 = y$$

et, pour $x = 0$,

$$y_1 = 0.$$

Fig. 24.

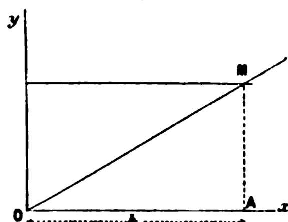
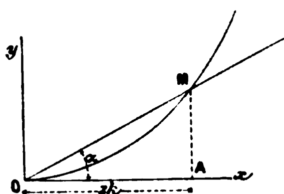


Fig. 25.



THÉORÈME V. — *La courbe intégrale du premier ordre d'une droite inclinée passant par l'origine est une parabole du second degré passant par l'origine et coupant la droite proposée en un point M ayant pour abscisse $2k$.*

En effet, on a, d'une part,

$$\int_0^x y\,dx = \tfrac{1}{2}\,x\,y$$

et, d'autre part,

$$\int_0^x y\,dx = ky_1,$$

soit

$$\tfrac{1}{2}xy = ky_1;$$

d'où, pour $x = 2k$,

$$y_1 = y$$

et, pour $x = x$,

$$y_1 = \frac{x}{2k}\,x\,\text{tang}\,\alpha = \frac{\text{tang}\,\alpha}{2k}\,x^2.$$

Théorème VI. — *Si l'on relève l'axe des x d'une hauteur u, on diminue les coefficients angulaires des courbes intégrales directes du premier ordre d'une même quantité $\frac{u}{k}$.*

En effet, on avait, avant de relever l'axe des x,

$$\frac{dy_1}{dx} = \frac{y}{k}.$$

Après le déplacement, on a

$$\frac{dy'_1}{dx} = \frac{y'}{k} = \frac{y-u}{k} = \frac{dy_1}{dx} - \frac{u}{k}.$$

Cette transformation revient à retrancher de la courbe intégrale y_1 les ordonnées d'une droite inclinée $k\eta = u(x - x_0)$ de coefficient angulaire $\frac{u}{k}$.

Théorème VII. — *Si l'on change d'un angle θ l'orientation de l'axe des x, il faut retrancher des ordonnées de la courbe intégrale y_1 les ordonnées de la parabole $k\eta = \text{tang}\,\theta\,\frac{x^2}{2}$.*

Cette proposition est évidente.

Les corollaires des différents théorèmes que nous venons d'exposer permettent de suivre immédiatement les diverses particularités du tracé de la courbe intégrale directe ou complémentaire d'une courbe proposée à ordonnées finies, et par ailleurs quelconque.

Soit la proposée ABCD (*fig.* 26). La courbe intégrale commence, avec une ordonnée nulle, à l'abscisse initiale des aires, M; et, comme corollaire du théorème I, on voit que son coefficient angulaire va en augmentant, à partir d'une certaine valeur proportionnelle à AM, jusqu'au maximum B de la proposée, puis en dimi-

nuant jusqu'au minimum suivant C, et ainsi de suite, en sorte qu'aux maxima et minima de la proposée correspondent des points d'inflexion $\left(\frac{dy_1}{dx}\text{ maximum ou minimum}\right)$ de l'intégrale.

Si, d'autre part, la proposée coupe l'axe des x (*fig.* 27), on voit, toujours par le même corollaire, que le point correspondant R de l'intégrale est un maximum ou un minimum $\left(\frac{dy_1}{dx} = 0\right)$. A partir du maximum R, l'intégrale redescend vers l'axe des x et coupe cet axe quand l'aire négative de la portion EF de la proposée est devenue égale à l'aire positive de la portion ABE.

Fig. 26.

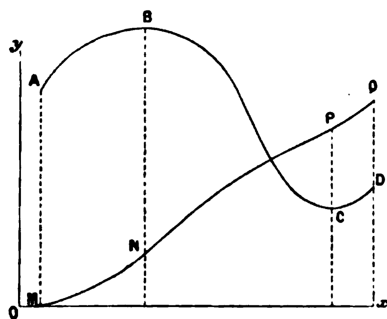
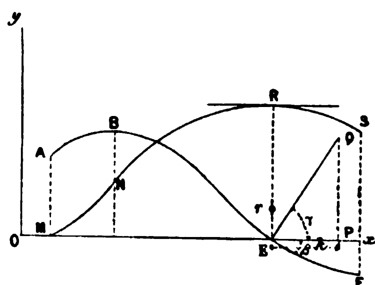


Fig. 27.



Un corollaire du théorème III permet de construire très simplement le rayon de courbure, en un sommet, R par exemple, de l'intégrale. Pour cela, au point correspondant de la proposée qui est celui, E (*fig.* 27), où cette courbe coupe l'axe, on mènera une demi-normale, et, sur l'axe des x, du même côté que cette demi-normale, on portera une longueur $\mathrm{EP} = k$. On élèvera ensuite la parallèle PQ à Oy jusqu'à rencontrer la demi-normale. La longueur PQ sera celle du rayon de courbure de l'intégrale au sommet R,

$$\overline{\mathrm{R}r} = \overline{\mathrm{PQ}}.$$

En effet,

$$\overline{\mathrm{R}r} = \frac{k^3}{k^2\frac{dy}{dx}} = \frac{k^3}{k^2 \operatorname{tang}\beta} = \frac{k}{\operatorname{tang}\beta} = k\operatorname{tang}\gamma = \overline{\mathrm{EP}}\operatorname{tang}\gamma = \overline{\mathrm{PQ}}.$$

Comme corollaires des théorèmes I et III réunis, on verra que :

1° Si la proposée présente une tangente parallèle à Oy, l'inté-

grale offre, sur la même abscisse, un point de rebroussement (*fig.* 28).

En effet, la courbe intégrale, considérée comme continue, c'est-à-dire telle que l'ordonnée Qq représente l'aire positive MABCc diminuée de l'aire négative cCDq, aura deux branches pour lesquelles le point P sera commun. De plus, en ce point P les deux branches ont la même tangente PT, puisque les deux portions de la proposée qui leur donne naissance ont, en C, même ordonnée.

Fig. 28.

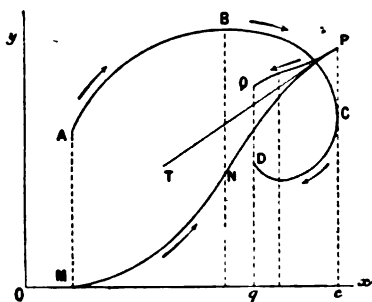
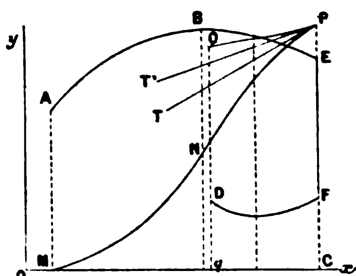


Fig. 29.



2° Si la proposée présente une portion de droite parallèle à Oy, EF par exemple (*fig.* 29), l'intégrale offre, sur la même abscisse, un point anguleux, P.

En effet, les deux branches de l'intégrale partent encore du même point P; mais, en ce point, elles ont deux tangentes différentes

Fig. 30.

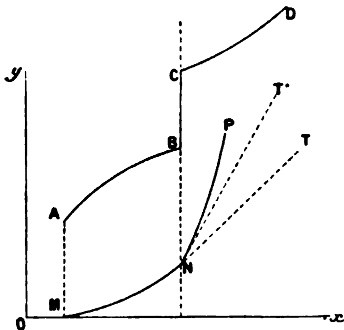
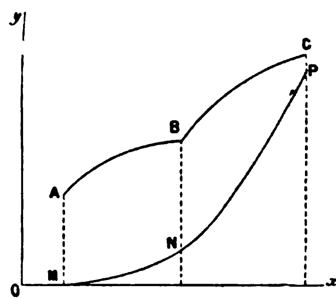


Fig. 31.



PT et PT′, puisque, à l'abscisse C, les deux portions de la proposée n'ont pas même ordonnée.

3° Plus généralement, si la proposée présente un changement

brusque d'ordonnée, l'intégrale présente un changement brusque d'inclinaison (ou point anguleux) (*fig.* 30).

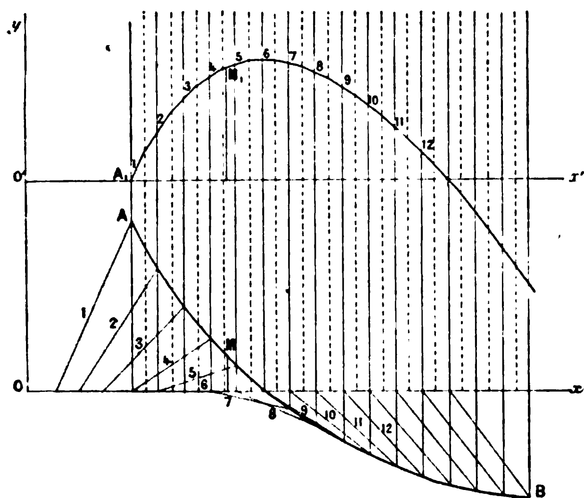
4° Si la proposée présente un changement brusque d'inclinaison (ou point anguleux), l'intégrale présente une variation brusque de courbure (*fig.* 31).

On le voit de suite en se reportant à l'expression du rayon de courbure de l'intégrale, c'est-à-dire au théorème III.

Enfin, comme application directe du théorème II, nous indiquerons la méthode suivante pour tracer approximativement l'intégrale directe du premier ordre ([1]).

Soit AMB (*fig.* 32) la courbe proposée. Commençons par la diviser au moyen d'ordonnées équidistantes dont la distance commune soit un sous-multiple de l'échelle k ($\frac{1}{3}k$ par exemple). A

Fig. 32.



partir de chaque pied d'ordonnées, portons sur Ox, et vers les x négatifs, l'échelle k, puis joignons le point ainsi obtenu au point correspondant de la proposée; nous obtiendrons ainsi une série de droites (qu'on peut appeler *directrices*), respectivement parallèles aux tangentes successives de l'intégrale.

Menons donc un axe $O'x'$ parallèle à Ox et à une distance quelconque de Ox. A partir de $O'x'$, nous mènerons des ordon-

([1]) ZMURKO, *Wyklad matematyki*. Lwow; 1864.

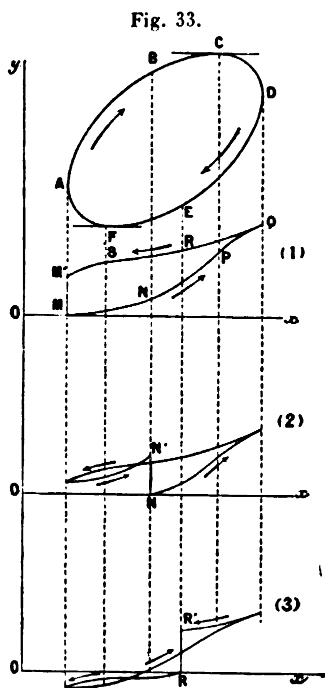
nées intercalaires situées à égale distance des premières. Cela fait, par le point initial A_1 nous tracerons une parallèle à la directrice 1 jusqu'à la médiane du premier intervalle, puis une parallèle à 2 de la médiane du premier intervalle à celle du deuxième, et ainsi de suite.

Nous obtiendrons ainsi une ligne polygonale se rapprochant d'autant plus de la courbe intégrale réelle que le nombre des divisions aura été pris plus grand.

THÉORÈME VIII. — *Si la proposée est une courbe fermée, la forme de la courbe intégrale dépend du choix du point origine des aires, mais la différence des ordonnées de l'intégrale au départ et à l'arrivée, une fois qu'on a décrit complètement la proposée, est constante.*

Soit, en effet, une courbe fermée ABCDEF (*fig.* 33). Suivant qu'on prendra l'origine des aires en A, pour suivre le contour dans le sens direct de la flèche, ou en B, ou en E, on aura les courbes intégrales (1), (2) ou (3), partant de M, N ou R; mais l'ordonnée finale en M, N ou R, représentant toujours par différence l'aire de la courbe fermée comptée positivement (sens direct) ou négativement (sens inverse), sera constante en grandeur, MM' = NN' = RR'.

Fig. 33.

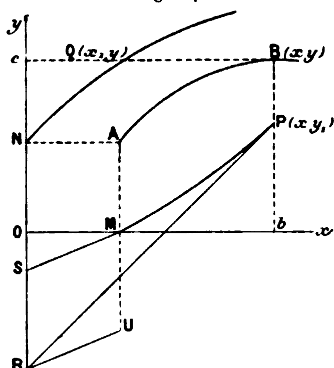


THÉORÈME IX. — *L'abscisse x_1 de l'intégrale complémentaire limitée à un point xy de la proposée se déduit du tracé des tangentes à l'intégrale directe au point origine des aires et au point d'ordonnée y_1, qui correspond au point xy de la proposée.*

En effet, soit MP l'intégrale directe de la proposée AB (*fig.* 34); la tangente à cette courbe en M n'est autre chose que l'intégrale directe de l'horizontale AN, et la tangente en P celle de l'horizontale B*c*. Suivons donc le con-

tour ABcN, en en prenant l'intégrale directe; on aura la courbe MPRU, l'ordonnée MU fournissant, avec le signe négatif, la valeur de l'aire ABcN. Or MU n'est autre chose que le segment coupé sur l'axe des ordonnées de la proposée par les tangentes aux points initial et courant de l'intégrale directe. Si donc cQ est

Fig. 34.



l'abscisse de l'intégrale complémentaire de même échelle k que l'intégrale directe, on n'aura qu'à reporter le segment $\overline{SR}$ en $\overline{cQ}$ pour avoir le point courant Q de l'intégrale complémentaire. Si l'échelle n'était pas la même, on prendrait $\overline{cQ} = \frac{k}{k'} \overline{SR}$.

31. Propriétés des courbes intégrales du deuxième et du troisième ordre.

Théorème I. — *Le moment statique de l'aire de la proposée, par rapport à un axe uu (fig. 35) parallèle à l'axe des ordonnées Oy, est donné par l'aire de l'intégrale directe du premier ordre prolongée par une horizontale jusqu'à l'axe uu à partir du point final de la courbe intégrale, ou encore, en valeur absolue, par l'ordonnée de l'intégrale directe du deuxième ordre prolongée jusqu'à l'axe uu par une tangente au point final de cette intégrale seconde.*

Soit, en effet, à prendre le moment de l'aire de la proposée AMB par rapport à uu. On a, pour moment d'une tranche élémentaire de l'aire, en appelant a l'abscisse de l'axe uu,

$$dx(x - a) = k\,dy_1(x - a)$$

et, pour le moment total par rapport à uu,

$$M_{uu}(\text{aire}) = k \int_{x_0}^{x} (x-a)\,dy_1.$$

Or $(x-a)\,dy_1$ n'est autre chose que l'aire PQ, limitée à l'intégrale directe du premier ordre. Donc

$$M_{uu}(\text{aire}) = k.\text{aire } aB_1C_1C$$

ou encore

$$M_{uu}(\text{aire}) = -k(\text{aire } aB_1b - \text{aire } bB_1C_1C),$$

et, en prenant, à la même échelle k, l'intégrale seconde directe, aB_2 pour aB_1 et B_2T pour B_1C_1,

$$M_{uu}(\text{aire}) = -k^2.\overline{CT}.$$

Fig. 35.

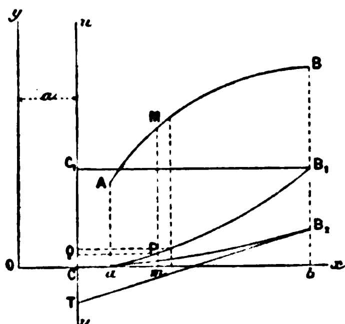
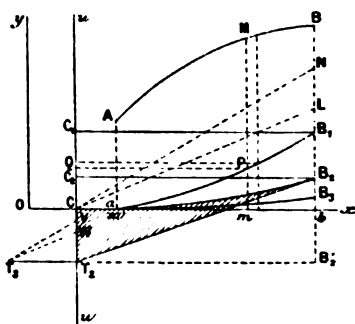


Fig. 36.



Théorème II. — *Le moment d'inertie de l'aire de la proposée par rapport à un axe uu (fig. 36) parallèle à Oy est fonction de l'aire de l'intégrale seconde directe, ou de l'ordonnée de l'intégrale directe du troisième ordre.*

En effet, pour l'aire élémentaire, on a

$$\begin{aligned} y\,dx(x-a)^2 &= k\,dy_1(x-a)^2 \\ &= 2k\,dy_1(x-a)\frac{(x-a)}{2} = 2k\,M_{uu} \text{ de l'élément PQ;} \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{x} y\,dx(x-a)^2 &= -2k\,M_{uu}(\text{aire } aB_1b - \text{aire } bB_1C_1C) \\ &= -2k^2(\text{aire } aB_2C_2C - \text{aire } C_2B_2T_2) \\ &= 2k^2\left(\frac{\text{aire } C_2B_2B'_2T_2}{2} - \text{aire } CC_2B_2b + \text{aire } aB_2b\right). \end{aligned}$$

Prenons donc l'intégrale troisième aB_3 de la proposée AMB ; portons, à partir de T_2, sur uu, $T_2V = \frac{1}{2}T_2C_2$ et $T_2W = CC_2$, puis, sur une horizontale et dans le sens des x négatifs $T_2T_3 = k$. Joignons T_3V et T_3W. Par le point C menons deux parallèles à ces lignes, on aura

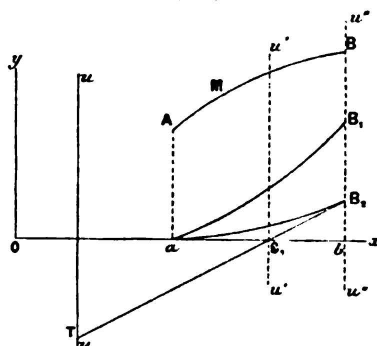
$$\tfrac{1}{2}\,\text{aire}\, C_2B_2B'_2T_2 - \text{aire}\, CC_2B_2b = k(\overline{NL});$$

d'où, enfin,

$$\int_{x_0}^{x} y\,dx(x-a)^2 = 2k^3(\overline{NL} + \overline{bB_3}).$$

Théorème III. — *La tangente au point final de l'intégrale seconde directe de la proposée coupe l'axe des x en un point qui donne l'abscisse du centre de gravité de l'aire de cette proposée* (*fig.* 37).

Fig. 37.



En effet, en se reportant au théorème I, quand l'axe uu se rapproche du point final jusqu'à passer, en $u'u'$, par le point G_1 où la tangente au point final de l'intégrale seconde directe coupe Ox, on a

$$M_{u'u'}(\text{aire}) = -k^2.0 = 0.$$

Donc le centre de gravité de l'aire AMB est sur $u'u'$.

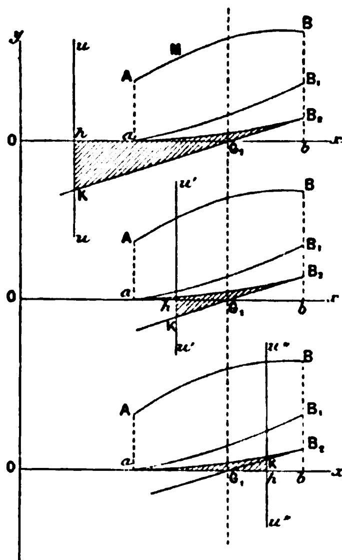
Remarque. — Au lieu de mener la tangente B_2T graphiquement, on peut calculer le segment G_1b; car, en supposant que uu vienne en $u''u''$, et en prenant les moments par rapport à $u''u''$, on a

$$G_1b = k\,\frac{\text{aire}\, aB_1b}{\text{aire}\, aABb} = k\,\frac{\overline{bB_2}}{\overline{bB_1}}.$$

Théorème IV. — *Le moment d'inertie de l'aire proposée par rapport à un axe uu parallèle à Oy est minimum quand uu passe par le centre de gravité de l'aire* (*fig.* 38).

En effet, ce moment d'inertie est représenté par l'aire hachée comprise entre l'intégrale seconde, l'axe Ox et la tangente à l'intégrale au point final. Et cette aire comprend toujours, en plus du

Fig. 38.



triangle mixtiligne aB_2G_1, un triangle G_1hK situé au-dessus ou au-dessous de Ox, sauf le seul cas où l'axe passe par G_1, c'est-à-dire contient le centre de gravité de l'aire proposée.

Théorème V. — *Soit* AMB *une courbe et* aB_1, aB_2 *ses intégrales directes du premier et du deuxième ordre. Si l'on mène deux ordonnées quelconques* MN, PQ (*fig.* 39), *les tangentes à l'intégrale seconde aux points situés sur ces ordonnées se coupent en un point qui a la même abscisse que le centre de gravité de l'aire comprise entre les ordonnées* MN *et* PQ.

En effet, soit uu la parallèle à Oy menée par l'intersection I des tangentes mt et pt'. Prenons les moments par rapport à uu des aires aAPQ et aAMN, dont la différence est l'aire comprise entre les ordonnées MN et PQ.

On a, d'après le théorème I,

$$M_{uu}(\text{aire } a\text{APQ}) = -k^2.\overline{\text{I}\gamma}$$

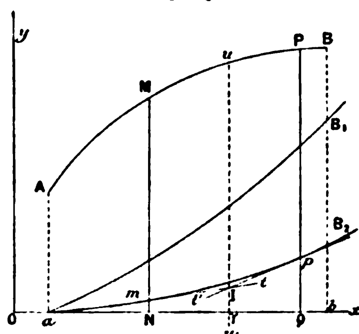
et

$$M_{uu}(\text{aire } a\text{AMN}) = -k^2.\overline{\text{I}\gamma};$$

d'où

$$M_{uu}(\text{aire MNPQ}) = 0. \qquad \text{(C. Q. F. D.)}$$

Fig. 39.



32. Du tracé des courbes intégrales des divers ordres.

On peut, au moyen d'instruments spéciaux dont nous parlerons dans le prochain Chapitre, construire ou même tracer continûment les courbes intégrales des divers ordres d'une courbe proposée.

Mais on peut aussi, sans le secours d'instruments autres que la règle et le compas, arriver à un résultat très suffisamment approché. Pour cela, on prend sur la proposée des points régulièrement distribués qui seront les sommets successifs d'un contour polygonal à substituer au contour vrai. En faisant passer par ces points des ordonnées limitant des aires successives faciles à évaluer, on aura les différents sommets de l'intégrale première du contour polygonal, et, dans les intervalles, cette intégrale devrait être constituée par des arcs paraboliques. On substituera de nouveau leurs cordes à ces arcs et l'on obtiendra des points successifs approchés de l'intégrale seconde, et ainsi de suite.

On peut aussi, comme l'a fait W. Froude, obtenir non seulement les points successifs de l'intégrale seconde, mais encore les tangentes en ces points, en profitant du théorème V, n° 31.

Pour cela, nous allons d'abord rappeler la construction géométrique de l'abscisse du centre de gravité d'un trapèze rectiligne. Soit $aABb$ ce trapèze (*fig.* 40); menons l'ordonnée médiane Mm et l'horizontale AC.

Portons sur ab, à partir de m et du côté de la grande base, $\overline{mL} = \frac{1}{3}\overline{mb} = \frac{1}{6}\overline{ab}$, et joignons LM, qui coupe AC en I. Ce point I a même abscisse que le centre de gravité du trapèze.

En effet, prenons les moments par rapport à Mm, on aura

$$\text{mom(aire } aABb) = \text{mom(triangle ABC)}$$

ou, en appelant a la longueur $\overline{ab}$,

$$a\frac{y_0+y_1}{2}x = a\frac{y_1-y_0}{2}\frac{a}{6} \quad \text{ou} \quad \frac{x}{\frac{a}{6}} = \frac{\frac{y_1-y_0}{2}}{\frac{y_1+y_0}{2}},$$

c'est-à-dire

$$\frac{x}{mL} = \frac{MP}{Mm};$$

donc

$$x = \overline{PI}.$$

Cela posé, soit un contour polygonal ABCD..., à sommets situés sur des ordonnées équidistantes, et que nous substituons

Fig. 40.

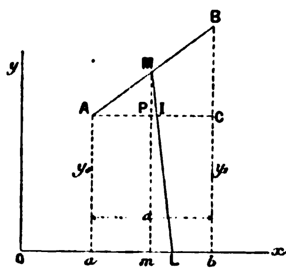
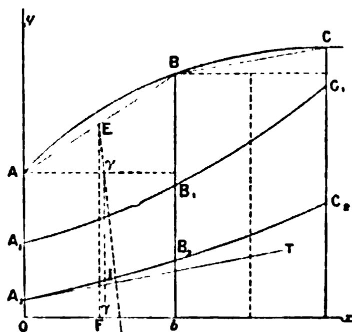


Fig. 41.



tout d'abord au contour proposé. Pour pouvoir tracer l'intégrale seconde à une certaine échelle k, il faut aussi, comme dans l'intégration analytique, se donner deux constantes ou deux conditions initiales, qui seront, par exemple, l'ordonnée OA_2 et le coefficient angulaire en A_2.

Cela étant, et la tangente A_2T, en A_2, tracée, le point I d'intersection de A_2T avec $\gamma\gamma$, obtenu comme nous l'avons dit plus haut, sera un point de la tangente au point B_2. Or cette seconde tangente, on peut la tracer en cherchant son inclinaison, au lieu de chercher le point B_2 par une quadrature.

Appelons, en effet, y, y', y'' les ordonnées de la proposée et de ses intégrales du premier et du deuxième ordre pour une même abscisse x, et $k_1 k_2$ les échelles de ces dernières.

On pourra écrire, d'une part,

$$\int_{x_0}^{x_1} y\,dx = k_1(y'_1 - y'_0)$$

et, de l'autre, approximativement (*fig.* 41),

$$\int_{x_0}^{x} y\,dx = a\,\frac{y_1+y_0}{2} = a(\overline{\text{EF}})_0,$$

a étant l'intervalle constant des ordonnées de division.

D'autre part,

$$k_2\frac{dy''}{dx} = y'$$

ou

$$k_2 \operatorname{tang}\alpha_n = y'_n, \qquad k_2 \operatorname{tang}\alpha_{n+1} = y'_{n+1},$$

$$\operatorname{tang}\alpha_{n+1} - \operatorname{tang}\alpha_n = \frac{1}{k_2}(y'_{n+1} - y'_n) = \frac{1}{k_2}\,\frac{1}{k_1}\int_{x_n}^{x_{n+1}} y\,dx$$

$$= \frac{1}{k_2 k_1}\,a\,\frac{y_n + y_{n+1}}{2} = \frac{a}{k_1 k_2}(\overline{\text{EF}})_n.$$

Portons donc sur Ox une longueur $\text{OH} = \frac{k_1 k_2}{a}$ (*fig.* 42); puis, sur la perpendiculaire HK, des longueurs

$$\text{HL} = \frac{k_1 k_2}{a}\operatorname{tang}\alpha_0, \qquad \text{LN} = \frac{y_0+y_1}{2} = (\text{EF})_0, \qquad \text{NP} = \frac{y_1+y_2}{2} = (\text{EF})_1, \qquad \ldots$$

Joignons au point O les points L, N, P, ... Il est aisé de voir qu'on a

$$\widehat{\text{LOH}} = \alpha_0, \qquad \widehat{\text{NOH}} = \alpha_1, \qquad \widehat{\text{POH}} = \alpha_2, \qquad \ldots$$

En effet, on doit avoir, par exemple,

$$\operatorname{tang}\alpha_1 = \operatorname{tang}\alpha_0 + \frac{a}{k_1 k_2}(\text{EF})_0$$

ou

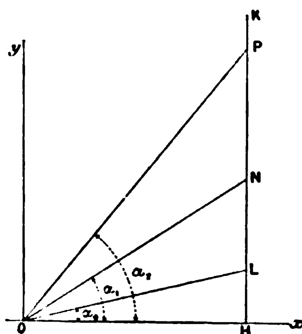
$$\frac{k_1 k_2}{a}\operatorname{tang}\alpha_1 = \frac{k_1 k_2}{a}\operatorname{tang}\alpha_0 + (\text{EF})_0$$

ou

$$\frac{k_1 k_2}{a} \operatorname{tang} \alpha_1 = \overline{\mathrm{LH}} + \overline{\mathrm{LN}}.$$

Dès lors, en menant par le point I (*fig.* 40) une parallèle à ON, on aura à la fois, sur l'ordonnée BO, le point B_2 cherché de l'intégrale seconde et la tangente en ce point.

Fig. 42.



Et ainsi de suite pour les autres points de l'intégrale seconde approchée. Connaissant ensuite ces points et les tangentes à la courbe en ces points, il sera très facile de tracer la courbe intégrale seconde.



CHAPITRE IV.

PLANIMÈTRES. — INTÉGROMÈTRES. — INTÉGRAPHES.

33.

Certains instruments spéciaux, appelés *planimètres, intégromètres* ou *intégraphes*, permettent d'effectuer mécaniquement les intégrations qu'on rencontre en théorie du navire, et qui se résument, le plus souvent, dans les trois formules :

1° De l'aire limitée par une courbe plane

$$\int_a^b y\,dx;$$

2° Du moment statique, par rapport à l'axe Ox, de cette aire

$$\int_a^b \frac{y^2}{2}\,dx;$$

3° Du moment d'inertie, par rapport à l'axe Ox, de cette aire

$$\int_a^b \frac{y^3}{3}\,dx.$$

On distingue les planimètres en planimètres non inscrivants et en planimètres inscrivants ou enregistreurs.

S'il était possible de réaliser une roulette de rayon variable à volonté, il suffirait de rendre ce rayon constamment proportionnel à $\frac{1}{y}$, ou à $\frac{2}{y_2}$, ou à $\frac{3}{y^3}$, et de la faire rouler sans glisser, de a en b, sur l'axe Ox, pour avoir, par l'angle décrit (en arc dans le cercle de rayon 1), les valeurs des trois intégrales proposées. On aurait, en effet,

$$r\,d\theta = dx \qquad \text{ou} \qquad \theta = \frac{1}{k}\int_a^b \frac{dx}{r},$$

c'est-à-dire

$$\theta_1 = \frac{1}{k_1}\int_a^b y\,dx, \qquad \theta_2 = \frac{1}{k_2}\int_a^b \frac{y^2}{2}\,dx, \qquad \theta_3 = \frac{1}{k_3}\int_a^b \frac{y^3}{3}\,dx.$$

Ce moyen ne pouvant être employé, c'est le développement du chemin parcouru par la roulette de rayon r constant qu'on rend non plus égal à chaque instant à dx, mais seulement proportionnel à dx, avec un rapport de proportionnalité constamment égal, suivant le cas, à y, ou à $\frac{y^2}{2}$, ou à $\frac{y^3}{3}$; on aura alors

$$r\,d\theta = k_1 y\,dx \quad \text{ou} \quad k_2\frac{y^2}{2}\,dx \quad \text{ou} \quad k_3\frac{y^3}{3}\,dx$$

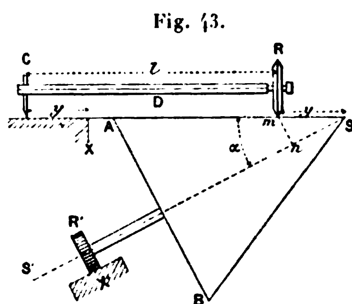
et

$$\theta_1 = \frac{k_1}{r}\int_a^b y\,dx, \qquad \theta_2 = \frac{k_2}{r}\int_a^b \frac{y^2}{2}\,dx, \qquad \theta_3 = \frac{k_3}{r}\int_a^b \frac{y^2}{3}\,dx.$$

34. Planimètre à cône ou à plateau d'Ernst et d'Hoppikofer.

Le planimètre d'Ernst et d'Hoppikofer, qui date du commencement du siècle et n'est plus employé aujourd'hui, réalisait la variation du chemin parcouru dans le rapport variable convenable au moyen d'un cône, d'angle au sommet α, tournant autour de son axe d'un angle proportionnel à dx, pendant qu'un style ou roulette se mouvait le long de la génératrice du cône, à partir du sommet, d'une quantité égale à y.

Fig. 43.



Le cône SAB (*fig.* 43) a sa génératrice SA dans le plan de la courbe dont on cherche l'aire, et perpendiculaire à l'axe Ox de cette courbe. Une branche métallique D, constamment parallèle à Oy, porte à ses extrémités : d'une part, le style décrivant; d'autre part, la roulette R, séparés par un intervalle l constant et égal à la distance du sommet S du cône à l'axe Ox. Un rail incliné ou crémaillère X'X', parallèle à l'axe Ox, sert de chemin de roulement à une roue dentée R', montée fixe sur l'axe du cône. Pour se servir de l'instrument, on imprime à l'ensemble du cône SAB

et de la branche D une translation parallèle à Ox, en même temps qu'on maintient constamment le style C sur la courbe proposée. Il est facile de voir qu'alors l'angle de rotation de la roulette R mesure l'aire de la courbe proposée entre les points de départ et d'arrivée. En effet, pour une translation dx, le cône tourne d'un angle $d\omega$, tel que l'on ait, en appelant r' le rayon de la roue R',

$$r'\,d\omega = dx,$$

et la roulette R, de rayon r, d'un angle $d\theta$, donné par

$$r\,d\theta = \overline{mn}.d\omega = y\sin\alpha\,d\omega = y\sin\alpha\,\frac{dx}{r'};$$

d'où

$$d\theta = \frac{\sin\alpha}{rr'}\,y\,dx;$$

d'où enfin

$$\theta_1 = \frac{\sin\alpha}{rr'}\int_a^b y\,dx.$$

Si le point de contact de la roulette laisse une trace sur le cône, le planimètre est enregistreur; mais il vaut mieux, dans ce cas, remplacer le cône par un plateau circulaire, en faisant $\alpha = \frac{\pi}{2}$, le principe de l'appareil restant le même.

Soit alors MNP (*fig.* 44) la courbe tracée sur le plateau par le point de contact de la roulette; on a, comme tout à l'heure,

$$d\theta = \frac{1}{rr'}\,y\,dx \qquad \text{et} \qquad \theta_1 = \frac{1}{rr'}\int_a^b y\,dx = \frac{1}{rr'}\,A_1.$$

Si maintenant, par une seconde opération, on cherche l'aire de la courbe MNP, que nous appellerons A_2, cette aire mesurera le moment de l'aire primitive $\int_a^b \frac{y^2}{2}\,dx$.

En effet, le rayon vecteur ρ de la courbe MNP n'est autre que y; on a donc

$$A_2 = \int_{\omega_1}^{\omega_2} \frac{\rho^2}{2}\,d\omega = \int_{\omega_1}^{\omega_2} \frac{y^2}{2}\,d\omega.$$

Or, d'autre part,

$$r'\,d\omega = dx \qquad \text{ou} \qquad d\omega = \frac{dx}{r'};$$

donc

$$A_2 = \frac{1}{r'} \int_a^b \frac{y^2}{2} dx.$$

Enfin, le moment statique polaire de l'aire A_2 de MNP par rapport au pôle S mesurera le moment d'inertie de l'aire primitive $\int_a^b \frac{y^3}{3} dx$.

Fig. 44.

En effet, le moment statique polaire de MNP a pour expression

$$\int_{\omega_1}^{\omega_2} \frac{\rho^2}{2} d\omega \frac{2\rho}{3} = \int_{\omega_1}^{\omega_2} \frac{\rho^3}{3} d\omega = \frac{1}{r'} \int_a^b \frac{y^3}{3} dx.$$

Le planimètre à plateau permet donc de résoudre les trois questions proposées.

35. Planimètres à roulette oblique non inscrivants.

Pour rendre le chemin circonférenciel de la roulette égal à dx multiplié par une quantité variable proportionnelle à y, on peut, au lieu d'un cône ou d'un plateau, employer une roulette oblique, en se basant sur le principe expérimental suivant : Si le plan de

la roulette n'est pas parallèle à la direction de sa translation, mais fait avec cette direction un angle α, pour une translation ds, le point de contact de la roulette se déplace, dans le plan de cette roulette, non plus de ds, mais de $ds \cos\alpha$, projection de ds sur le plan de la roulette; on a, dans ce cas,

$$r\,d\theta = ds \cos\alpha.$$

Dès lors, si l'on assujettit la roulette à décrire l'axe XX, ou une parallèle à cet axe, avec une inclinaison sur XX telle, à chaque instant, que $\cos\alpha = ky$, on aura un intégromètre très simple.

Dans ce but, on monte la roulette à l'une des extrémités d'une tige de longueur constante qui porte le style décrivant à l'autre bout, et, pendant qu'on parcourt le contour de la courbe proposée avec le style, on maintient constamment le point de contact de la roulette sur l'axe XX. Il faut évidemment que la longueur constante de la tige soit réglée au moins égale à la plus grande des ordonnées de la proposée (*fig.* 45).

Fig. 45.

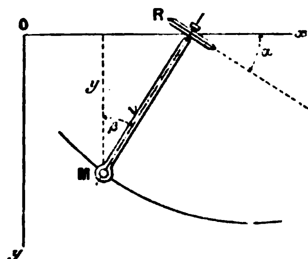
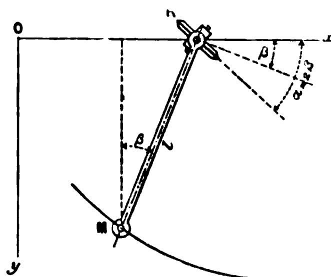


Fig. 46.



Dans ces conditions, l'angle α est constamment égal à l'angle β que fait la tige avec l'ordonnée et pour lequel on a

$$y = l \cos\beta.$$

Donc

$$\cos\alpha = \frac{y}{l}$$

et, par suite,

$$\theta_1 = \frac{1}{rl}\int_a^b y\,dx.$$

Si maintenant nous recommençons les opérations avec un instrument semblable au premier, mais modifié au moyen d'engrenages

convenables, faciles à imaginer, de telle façon que l'angle α, au lieu de rester constamment égal à β, devienne un multiple de β, nous aurons le moyen d'effectuer mécaniquement les deux autres intégrations proposées. La roulette s'oriente alors sur la tige à laquelle elle doit être reliée par un émerillon.

Faisons d'abord $\alpha = 2\beta$ (*fig.* 46).

On a

$$\cos\alpha = \cos 2\beta = \cos^2\beta - \sin^2\beta = 2\cos^2\beta - 1.$$

Or

$$\cos\beta = \frac{y}{l};$$

d'où

$$\cos\alpha = 2\frac{y^2}{l^2} - 1.$$

D'autre part,

$$r.d\theta_2 = dx\cos\alpha;$$

d'où

$$\theta_2 = \frac{4}{rl^2}\int_a^b \frac{y^2}{2}\,dx - \frac{1}{r}\int_a^b dx, \qquad \theta_2 = \frac{4}{rl^2}\int_a^b \frac{y^2}{2}\,dx - \frac{L}{r},$$

en appelant L la longueur $\overline{ab}$.

Faisons ensuite $\alpha = 3\beta$.

Nous avons

$$\cos\alpha = \cos 3\beta = 4\cos^3\beta - 3\cos\beta = 4\frac{y^3}{l^3} - 3\frac{y}{l}$$

et

$$r.d\theta_3 = dx\cos\alpha;$$

d'où

$$\theta_3 = \frac{12}{rl^3}\int_a^b \frac{y^3}{3}\,dx - \frac{3}{rl^2}\int_a^b y\,dx = \frac{12}{rl^3}\int_a^b \frac{y^3}{3}\,dx - 3\theta_1.$$

Pour effectuer, dans ce système, les trois opérations, il faut donc trois instruments, ou au moins un instrument pouvant recevoir les paires d'engrenages appropriées à l'amplification des rotations dans les rapports 1, 2 et 3, autour des axes verticaux M et R.

36. Intégromètre d'Amsler, de Schaffhouse, non inscrivant.

Cet intégromètre, basé sur le principe des roulettes obliques, a pour particularité qu'il porte trois roulettes dont les orientations sur Ox sont β, 2β et 3β, en sorte que les trois intégrations se

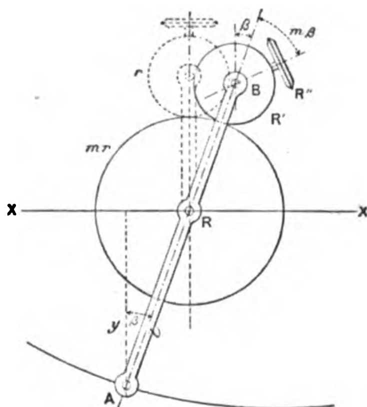
font d'un seul coup. Les roulettes sont entraînées par un chariot commun mobile parallèlement à XX; l'émerillon R de la branche MR parcourt l'axe XX, comme tout à l'heure.

37. Intégromètre Marcel Deprez, non inscrivant.

Cet intégromètre, basé sur le même principe que le précédent, n'a qu'une roulette, en sorte que, pour effectuer les trois intégrations, il faut parcourir trois fois le contour proposé.

La branche AR (*fig.* 47) porte en R une roue d'engrenage, ne tournant pas avec AR et se transportant simplement le long de XX. La branche AR se prolonge de R en B, où se trouve l'émerillon d'une roue satellite R′ portant la roulette en R″. Cette roulette est calée de telle façon sur la roue satellite que, quand la branche AR est perpendiculaire à XX, le plan de cette roulette est parallèle à cet axe XX.

Fig. 47.



Soient r le rayon de la roue satellite, et mr celui de la roue d'engrenage. Quand la branche AR tournera de β par rapport à l'axe des y, la roue satellite R′ tournera de $m\beta$ par rapport à la branche AR, et par suite de $(m+1)\beta$ par rapport à l'axe des y. Le plan de la roulette fera donc l'angle $(m+1)\beta$ avec l'axe des x.

On réalise les cas $m=0$, $m=1$, $m=2$, nécessaires pour le but à atteindre, en affolant certaines roues et en en embrayant d'autres.

38. Planimètre polaire d'Amsler, non inscrivant.

Un planimètre beaucoup plus connu et plus répandu que les précédents est le planimètre polaire d'Amsler.

Il se compose d'une tige de longueur constante AR, munie à une extrémité du style décrivant A, et, à l'autre, d'une roulette R restant constamment perpendiculaire à la tige.

La tige AR est articulée en un point B, intermédiaire entre A et R, à l'extrémité d'une seconde tige BO, de longueur constante aussi.

Pour effectuer une opération, on fixe l'extrémité O, qui sert de pôle, et l'on parcourt le contour proposé, supposé fermé, avec le style A; la rotation de la roulette pendant ce temps mesure l'aire décrite.

Soient, en effet, a la longueur BA; b la longueur BO; d la longueur BR; r le rayon de la roulette (*fig.* 48).

Fig. 48.

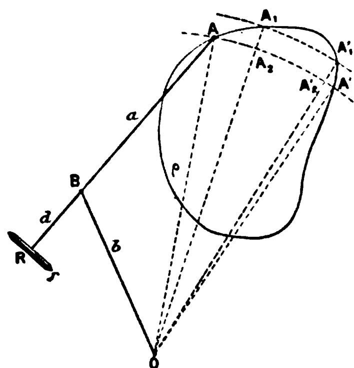
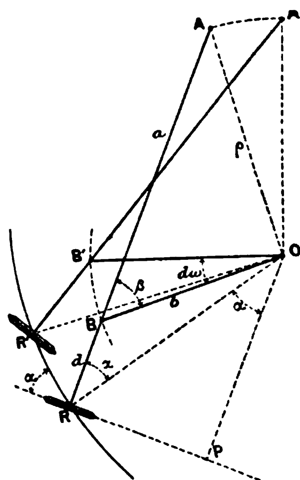


Fig. 49.



Quand le style parcourt des arcs AA_1, $A'_1 A'$ compris entre deux circonférences concentriques au pôle, cela revient à lui faire parcourir dans le même sens deux arcs de circonférence, AA_2, $A'_2 A'$, et, en sens contraire, deux portions de rayons A_2A_1, $A'_1A'_2$. Or, pour ces portions de rayons, l'instrument formant la même figure géométrique en A et en A', en A_1 et en A'_1, il est évident que les rotations élémentaires de la roulette dues à ces portions de rayons se détruisent rigoureusement. Reste, pour la sommation définitive, à déterminer la rotation $d\theta$ quand l'instrument (supposé alors de forme invariable) tourne autour du pôle d'un angle $d\omega$.

Pendant ce mouvement angulaire $d\omega$, l'élément du chemin tracé par la roulette RR' (*fig.* 49) fait un angle α avec le plan de cette roulette; de plus, la roulette étant sur le prolongement de BA, la rotation due au chemin $ds = RR'$ est de sens contraire à celle

que produirait une translation de l'instrument dans la direction AA_1; nous prendrons donc ds avec le signe —, et nous aurons

$$r\,d\theta = -ds\cos\alpha = -\overline{OR}\,d\omega\cos\alpha = -\overline{OP}\,d\omega = -(d + b\cos\beta)\,d\omega$$

Dans le triangle OBA, on a

$$\rho^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\beta\,;$$

d'où

$$b\cos\beta = \frac{a^2 + b^2 - \rho^2}{2a}.$$

Donc on peut écrire

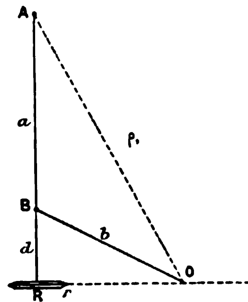
$$\begin{aligned} r\,d\theta &= -\left[d + \frac{1}{2a}\left(a^2 + b^2 - \rho^2\right)\right] d\omega \\ &= -\left(d + \frac{a^2 + b^2}{2a}\right) d\omega + \frac{1}{a}\,\frac{\rho^2}{2}\,d\omega \end{aligned}$$

et, en intégrant,

$$\theta = -\frac{1}{r}\left(d + \frac{a^2 + b^2}{2a}\right)\Omega + \frac{1}{ar}\,A,$$

formule dans laquelle A désigne l'aire cherchée de la courbe fermée proposée.

Fig. 50.



Or, si le pôle est extérieur à la courbe, $\Omega = 0$, et la formule devient

$$\theta = \frac{1}{ar}\,A.$$

Si le pôle est intérieur à la courbe, $\Omega = 2\pi$,

$$\theta = \frac{1}{ar}\,A - \frac{2\pi}{r}\left(d + \frac{a^2 + b^2}{2a}\right) = \frac{1}{ar}\left[A - 2\pi\left(ad + \frac{a^2 + b^2}{2}\right)\right].$$

La signification de la constante qui figure dans la parenthèse est facile à trouver. C'est la surface du cercle dont le rayon est égal au rayon vecteur ρ_1 correspondant à la position spéciale de l'instrument où le plan de la roulette passe par le pôle (*fig.* 50).

On a, en effet,

$$\rho_1^2 = (a+d)^2 + b^2 - d^2 = a^2 + d^2 + 2ad + b^2 - d^2 = 2\left(ad + \frac{a^2+b^2}{2}\right);$$

on a donc en somme, dans le cas du pôle intérieur,

$$\theta = \frac{1}{ar}(A - \pi\rho_1^2).$$

La valeur de la constante $\pi\rho_1^2$ est en général inscrite sur l'instrument; mais, dans les planimètres de construction soignée, on peut faire varier cette valeur en faisant varier la longueur a de la branche BA. A la roulette sont adjoints un compteur du nombre de tours et un vernier pour l'appréciation des fractions de tour très petites.

39. Intégraphe Abdank Abakanowicz, inscrivant.

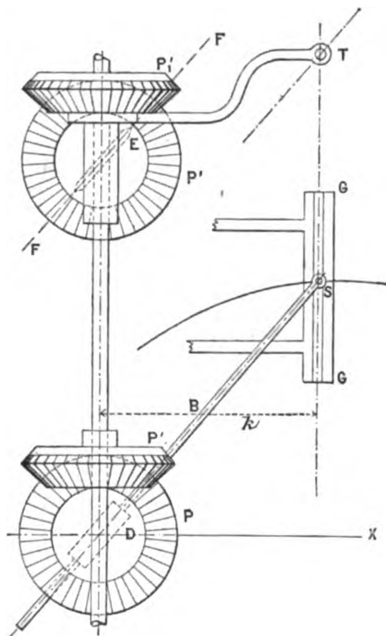
L'intégraphe imaginé par M. Abdank Abakanowicz a pour but de fournir, non pas seulement les évaluations de l'aire, du moment et du moment d'inertie d'un contour fermé limité à une certaine ordonnée fixe, mais bien l'évaluation *continue* de ces éléments de calcul pour un contour fermé limité à une ordonnée variable. En d'autres termes, l'intégraphe trace les courbes intégrales d'un contour donné, alors que les instruments précédemment décrits fournissent seulement le moyen de déterminer certains points de ces courbes, en exigeant autant d'opérations que l'on veut de points.

L'intégraphe se compose d'un chariot se déplaçant parallèlement à l'axe Ox et entraînant avec lui une glissière GG (*fig.* 51) parallèle à Oy et dans laquelle se meut le style décrivant S. Ce style est d'ailleurs relié par une bielle glissante B à une douille D, située à la distance k de la glissière GG du côté des x négatifs et sur l'axe des x, en sorte que la bielle B est constamment parallèle à la tangente à la courbe intégrale directe du premier ordre.

Il ne reste donc plus qu'à faire décrire à la pointe traçante, à chaque instant, un élément parallèle à la bielle B. Pour cela, cette

pointe traçante T, disposée sur la même ordonnée que la pointe décrivante S, est portée par une portion du chariot qui repose sur le papier par l'intermédiaire d'une roulette à tranche aiguë E, constamment parallèle à la bielle B. Le parallélisme est obtenu en transmettant à la roulette E, au moyen d'un système de roues d'angle, la rotation de la bielle B par rapport à l'ordonnée. Puis, pour que le mouvement des pignons P', P'_1 puisse se faire pendant une translation suivant le plan FF de la roulette, alors que les pignons de commande P, P' se déplacent sur Ox, P'_1 est monté à douille sur l'axe de P', la liaison des axes pour la rotation ayant lieu au moyen d'une longue clavette.

Fig. 51.



Le rôle des courbes intégrales étant d'une grande importance dans les plans et études de navires, il est certain que les intégraphes sont appelés à rendre de grands services aux constructeurs maritimes.

Pour les variantes de l'intégraphe Abdank Abakanowicz, on consultera avec fruit l'Ouvrage que son auteur a publié sur le sujet en 1886 [1].

---

(1) ABDANK ABAKANOWICZ (BR.), *Les intégraphes, la courbe intégrale et ses applications;* 1886 (Paris, Gauthier-Villars).



CHAPITRE V.

APPLICATION AU NAVIRE DES MÉTHODES DE CALCUL POUR LES CARÈNES DROITES.

40. Définitions.

Avant d'entrer dans le détail de l'application au navire des méthodes de calcul, il est nécessaire de définir certains termes en usage dans la Marine et employés dans les légendes des plans et dans les devis de tracés.

La *carène* du navire, qu'on appelle aussi souvent *œuvres vives*, est la portion de la coque située au-dessous du niveau de l'eau. Nous avons dit, dès le début, que, pour connaître l'intensité et le point d'application de la résultante des pressions de l'eau sur cette carène, il faut en déterminer aussi complètement que possible la forme extérieure, et que, sa surface ne répondant point, en général, à des définitions analytiques ou géométriques, on la représente d'habitude par un choix judicieux de sections projetées sur trois plans orthogonaux.

A part des cas exceptionnels, la carène d'un navire chargé normalement, au repos et en calme, est absolument symétrique par rapport à un plan vertical appelé *diamétral* ou *longitudinal*. On se contente donc de représenter une moitié de la carène et le diamétral est naturellement utilisé comme l'un des trois plans principaux de projection, celui sur lequel le navire, en quelque sorte vu de profil, présente sa véritable physionomie. On est dans l'usage de toujours placer l'arrière du navire à gauche.

En haut, la carène du navire en charge normale est limitée par le plan horizontal de l'eau, dont on se sert comme de second plan principal de projection; c'est la *flottaison en charge et en différence,* ainsi nommée parce qu'en charge normale la quille du navire n'est généralement pas horizontale, les profondeurs ou *tirants*

d'eau de ses extrémités présentant une certaine *différence* qui caractérise l'*assiette* du navire. Ce mode de limitation par en haut de la carène normale, tout à fait rationnel, est aujourd'hui prescrit dans les arsenaux de l'État et généralement adopté dans les chantiers de l'industrie privée. L'ancien tracé, *sans différence,* c'est-à-dire avec la quille horizontale, a été longtemps seul employé dans la Marine de l'État; on invoquait en sa faveur l'avantage, bien faible et fort discutable, d'éviter l'enchevêtrement des projections des sections par des plans perpendiculaires au longitudinal et à la flottaison.

Il va sans dire que, suivant l'état et la répartition du chargement, le navire, tout en restant droit, c'est-à-dire symétrique par rapport au longitudinal, peut occuper diverses positions par rapport au niveau de l'eau. On distinguera donc la flottaison en charge normale et en différence, dont nous venons de parler, de la *flottaison lège*, ou de la *flottaison en charge sans différence,* ou des *flottaisons inclinées,* etc.

Le troisième plan principal de projection est vertical et perpendiculaire au longitudinal; on l'appelle le *transversal,* ou simplement le *vertical.* Pour définir la carène comme surface topographique, on la coupe par trois réseaux de sections parallèles aux trois plans principaux de projection. Ce seront les *sections longitudinales,* parallèles au longitudinal et se projetant sur lui en vraie grandeur; les *lignes d'eau,* parallèles à la flottaison en charge et en différence; les *couples de tracé,* parallèles au vertical.

Théoriquement, si les sections étaient assez multipliées, un seul réseau suffirait pour figurer la carène; mais, pratiquement, les trois réseaux sont nécessaires pour montrer le navire sous tous ses aspects et pour permettre d'apprécier immédiatement la régularité et la continuité de ses formes. Une concordance absolue (appelée *balancement*) doit naturellement exister entre les trois réseaux.

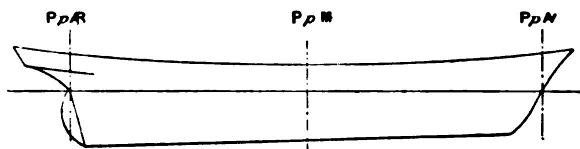
Les formes un peu contournées, celles de l'avant et de l'arrière par exemple, exigent souvent l'adjonction de sections auxiliaires.

A l'avant et à l'arrière, on limite la carène par des plans de convention parallèles au vertical, et dont les traces sur le longitudinal sont nommées *perpendiculaires extrêmes.*

La perpendiculaire arrière (Pp Æ) passe par l'intersection de la flottaison en charge et de l'axe du gouvernail.

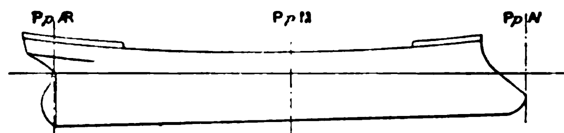
La perpendiculaire avant (Pp A') passe, dans le cas d'une étrave droite ou élancée, par l'intersection de la flottaison en charge et du contour extérieur de l'étrave (*fig.* 52); dans le cas d'une étrave

Fig. 52.



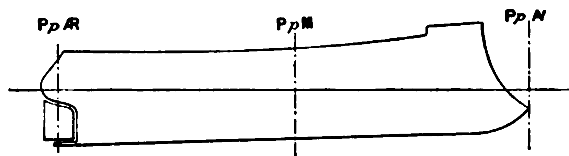
renversée, elle est tangente au contour extérieur de l'étrave (*fig.* 53).

Fig. 53.



Les perpendiculaires, ainsi placées, comprennent toute la carène, sauf dans le cas exceptionnel des bâtiments à arrière traînant, où une partie de l'arrière reste en dehors (*fig.* 54).

Fig. 54.



La perpendiculaire tracée sur le longitudinal à mi-distance des perpendiculaires extrêmes est la *perpendiculaire milieu* (PpM). C'est, en général, la trace du couple de tracé le plus large, celui qu'on désigne sous le nom de *maître couple*.

La distance des deux perpendiculaires extrêmes est dite : *longueur de la carène entre perpendiculaires*, et représentée par A. La *longueur proprement dite de la carène*, L, est prise entre la perpendiculaire avant et la face arrière de l'étambot avant. Enfin, la *longueur de la flottaison en charge* est désignée par L'.

En bas, la carène est limitée par un plan perpendiculaire au longitudinal, incliné sur l'horizon et passant par le trait extérieur de la râblure de la quille pour les navires en bois, et par l'intersection des faces de la quille et du bordé moyen pour les navires en fer. La trace de ce plan sur le longitudinal est la *ligne du fond de carène*. Quand il n'y a qu'une tôle-quille, le fond de carène est l'intersection du longitudinal avec le bordé moyen pour les carènes à clins, et avec le bordé extérieur pour les carènes à francs bords. La *profondeur de carène en charge, p*, est la distance, comptée sur la perpendiculaire milieu, de la flottaison en charge au fond de carène.

Les *tirants d'eau extrêmes en charge,* à l'arrière et à l'avant, sont les distances comptées, sur les perpendiculaires extrêmes, de la flottaison en charge à la face inférieure de la quille supposée plane, et prolongée s'il est nécessaire. Soient T le tirant d'eau arrière et t le tirant d'eau avant. Le *tirant d'eau moyen en charge*, T_m, est la moyenne arithmétique de T et de t : $T_m = \frac{T+t}{2}$. C'est la distance, sur la perpendiculaire milieu, de la flottaison en charge à la ligne droite inclinée joignant les extrémités de T et de t. La différence de tirant d'eau, Δ, est égale à $T - t$.

On remarquera que le tirant d'eau moyen, en supposant même la quille absolument droite, est plus grand que la profondeur de carène : 1° du tableau q de la quille; 2° de l'épaisseur e de la fausse quille.

L'angle α de la face inférieure de la quille droite, ou de la ligne du fond de carène (si le tableau de quille et l'épaisseur de la fausse quille sont constants), avec l'horizon, est donné par $\tan g\alpha = \frac{\Delta}{\lambda}$.

Le cadre de la carène ainsi réglé, il reste à terminer la représentation du navire, au-dessus de la carène proprement dite, par le tracé des grandes lignes des œuvres mortes, c'est-à-dire par le tracé des livets des divers ponts et faux ponts. Ces livets ont sur le longitudinal des traces courbes parallèles dont la distance verticale constante est la *hauteur de livet en livet,* expression impropre qui signifie *hauteur de ligne droite de livet en ligne droite de livet*. Le tracé de la projection d'un livet sur le longitudinal doit être accompagné du tracé de la ligne milieu du pont que ce livet définit.

41. Réglementation des plans de formes de la Marine de l'État.
(Voir *Pl. I* et *II.*)

En ce qui concerne la carène proprement dite, voici les prescriptions, réglementaires dans la Marine de l'État, pour le tracé des réseaux de sections :

I. Pour les sections longitudinales, on place la section la plus éloignée du longitudinal aux $\frac{3}{4}$ de la $\frac{1}{2}$ largeur maxima du navire, puis on partage l'intervalle entre cette section extrême et le longitudinal en cinq parties égales. On a donc (non compris le longitudinal, auquel on affecte l'indice 0) cinq sections longitudinales, qu'on numérote 1, 2, 3, 4 et 5 à partir du longitudinal. Ces sections ne servent pas, en général, aux calculs, mais seulement à la régularisation de la surface. Elles sont généralement prolongées à travers les hauts ou œuvres mortes, pour en figurer les formes. Leur équidistance est égale aux $\frac{3}{40}$ de la largeur maxima du navire.

II. Pour les lignes d'eau, on divise en dix parties égales la profondeur de carène en charge, p, et l'on mène par ces divisions des plans parallèles à la flottaison en charge. On a ainsi 11 plans, dont le plus bas reçoit l'indice 0, la flottaison en charge formant la ligne d'eau 10. L'intervalle est $h = \frac{p}{10}$.

Une autre ligne d'eau de même équidistance h doit toujours être tracée au-dessus de la flottaison en charge, pour que le réseau dépasse la portion du navire normalement immergée. Dans les calculs des carènes inclinées par la méthode Daymard, il faut même calculer le volume complet du bâtiment et, par suite, prolonger le réseau des lignes d'eau jusqu'au-dessus du pont supérieur, à moins qu'on ne se contente de calculer ce volume total par une somme d'onglets, comme il sera dit plus tard.

On projette les lignes d'eau sur un plan parallèle, et l'on dispose leurs projections en dessous du dessin du longitudinal ; celles de la demi-carène sont tracées en dessous d'un axe XX parallèle à la flottaison en charge du longitudinal ; les lignes d'eau supérieures sont d'habitude, et pour dégager le dessin, tracées au-dessus de XX, ainsi que les projections horizontales des *livets des ponts* et autres lignes à double courbure des œuvres mortes,

qui doivent être figurées sur le longitudinal. C'est aussi de ce côté qu'on trace le rabattement des *lisses planes* (intersections de la surface de carène par des plans perpendiculaires au vertical, mais obliques sur le longitudinal).

Le tracé des lisses planes n'est plus exigé aujourd'hui sur les plans de formes de la Marine de l'État, mais il est indispensable pour les études préliminaires d'une carène, et c'est à ce titre que nous l'indiquons.

Sur le plan horizontal, des lignes parallèles à l'axe XX et convenablement espacées figurent les traces des sections longitudinales.

III. Pour les couples de tracé, on divise en vingt parties égales la longueur entre perpendiculaires, Λ, et l'on mène par ces divisions des plans parallèles au vertical. La perpendiculaire milieu, qui est alors la trace du *couple milieu*, reçoit l'indice o; la P*p* A' devient le dixième couple A'; la P*p* Æ, le dixième couple Æ. L'équidistance est $\lambda = \frac{\Lambda}{20}$.

Aux extrémités, la représentation complète des formes exige le tracé de couples supplémentaires qu'on place à mi-distance entre les précédents. De même, il est bon de prolonger le réseau au delà de la P*p*Æ à travers les œuvres mortes.

On projette les couples A', sur le vertical, à droite de la trace du longitudinal; et les couples Æ à gauche de cette trace. Le couple milieu est représenté des deux côtés.

On est dans l'usage d'employer l'encre noire pour les couples, axes, contours et lisses planes; l'encre bleue pour les lignes d'eau; l'encre rouge pour les sections longitudinales et les livets. Les couples, lignes d'eau ou sections longitudinales supplémentaires sont tracés en tirets avec l'encre convenable.

D'après une réglementation récente, les plans des formes et des emménagements doivent être tracés à l'échelle de :

10^{mm} par mètre, pour les bâtiments de 100^{m} de longueur et au-dessus;
15^{mm} par mètre, pour les bâtiments dont la longueur est comprise entre 50^{m} inclusivement et 100^{m} exclusivement;
30^{mm} par mètre, pour les bâtiments dont la longueur est inférieure à 50^{m};
50^{mm} par mètre, pour les embarcations.

Les plans de formes doivent être tracés en différence, hors

bordé pour les bâtiments en bois et les bâtiments en fer ou acier à francs bords, hors bordé moyen pour les bâtiments en fer ou en acier à clins, hors cuirasse pour les cuirassés.

On doit faire figurer sur les plans de formes, outre les lignes principales énoncées déjà :

La guibre;
Les bossoirs, les écubiers, les ancres au poste de mer;
Les sabords de gaillards et de batteries;
Les échelles de commandement;
Les amorces des mâts et cheminées;
La galerie du commandant;
Le tracé des cans supérieur et inférieur du blindage, si le bâtiment est cuirassé;
Le contour extérieur du gouvernail;
L'axe de l'hélice, l'hélice et sa cage (dans le cas d'une hélice centrale);
Les axes des arbres, les parties extérieures de ces arbres, leurs supports et les hélices (dans le cas d'hélices latérales);
Les tambours, les jardins et les roues (dans le cas de roues).

Enfin, si le bâtiment est cuirassé, les parties blindées doivent être teintées en bleu clair.

Les plans de formes doivent porter trois légendes : une première légende intitulée *Dimensions principales;* une deuxième intitulée *Déplacement,* et une troisième intitulée *Stabilité.* On y ajoute un Tableau intitulé *Résultats des calculs.* Nous parlerons plus tard du contenu des légendes et du Tableau. On doit aussi tracer graphiquement sur les plans les résultats de certains calculs, sur lesquels nous reviendrons (n° 49).

42. Marche à suivre pour le tracé des plans de formes.

On doit prendre toutes les précautions possibles pour obtenir un parallélisme rigoureux entre les traces des diverses sections et une coïncidence absolue entre les projections faites sur les divers plans. Il est bon de procéder de la façon suivante :

On trace d'abord une ligne parallèle aux grands côtés du papier, et d'une extrémité à l'autre; elle figurera sur le vertical et le longitudinal la trace de la flottaison en charge.

Aux extrémités de cette ligne, on élève avec précision, c'est-à-dire en employant le compas à cercles et non l'équerre, des perpendiculaires. Au-dessus et au-dessous de la flottaison, on porte

sur ces perpendiculaires des longueurs égales, et l'on réunit, par des parallèles à la flottaison, les points obtenus. On réalise ainsi un cadre enveloppant le dessin et assurant l'exactitude des divisions ultérieures.

Pour le tracé des parallèles à la flottaison, il est bon de n'employer que le même côté d'une longue règle; car le bord de cet instrument n'est jamais rigoureusement rectiligne, et, si l'on change de côté, on ne tarde pas à constater la courbure d'une manière sensible, tandis qu'en opérant comme nous l'indiquons, les lignes parallèles aux grands côtés du cadre, si elles sont légèrement courbes, seront du moins des courbes parallèles, ce qui atténue beaucoup l'inconvénient de la courbure. La même recommandation est à observer, quoique à un moindre degré, pour les parallèles aux petits côtés du cadre, pour lesquelles on fait usage de règles plus courtes, et par suite plus parfaites.

Les parallèles aux côtés du cadre, qui devront être ultérieurement tracées, le seront au moyen de longueurs égales portées à partir de ces côtés ou de la flottaison en charge. Dans ces conditions, on a beaucoup de chances de réaliser un canevas exact pour les trois projections, car on réduit ainsi au minimum les défauts de concordance dus aux défauts de parallélisme des lignes.

Les courbes sont tracées à l'aide de lattes flexibles en bois de premier choix et de diverses formes appropriées à la courbure plus ou moins prononcée des courbes qu'elles doivent suivre fidèlement pour guider le tire-lignes. Les unes, à section uniforme d'environ 8^{mm} sur $4^{mm},5$ et de $1^{m},50$ à 2^{m} de longueur, servent au tracé des livets sur le longitudinal. D'autres, amincies aux extrémités, servent au tracé des lignes d'eau et des livets sur le plan horizontal, et des sections longitudinales sur le plan longitudinal; elles ont même longueur et même largeur que les précédentes, mais leur épaisseur, de $5^{mm},5$ au milieu, se termine à $0^{mm},5$ aux extrémités. Enfin, des lattes minces et flexibles servent au tracé des couples et livets sur le vertical, et des portions contournées des sections longitudinales sur le plan longitudinal; leur longueur varie de $0^{m},70$ à $0^{m},90$, leur largeur est de 7^{mm} environ et leur épaisseur de $1^{mm},25$ au milieu. Ces lattes ont souvent leurs extrémités amincies.

Des plombs à bec servent, pendant le tracé, à maintenir les lattes en place.

Pour la lecture des longueurs sur les plans, il est indispensable de posséder deux règles à double biseau, d'une trentaine de centimètres de longueur, portant des graduations relatives aux quatre échelles suivantes :

10^{mm} par mètre, avec indication des demi-millimètres;
15^{mm} par mètre, avec division en 10 parties de $1^{mm},5$ ($0^m,10$ du navire) et subdivision en 20 parties de $0^{mm},75$ ($0^m,05$ du navire);
20^{mm} par mètre (échelle double de la première);
30^{mm} par mètre (échelle double de la seconde).

Ce matériel, indispensable pour le tracé des plans de navires et employé de longue date dans les constructions navales, rendrait les plus grands services dans les bureaux de dessin de la plupart des autres professions.

43. Devis de tracé.

Après tout tracé graphique d'un plan de formes, effectué soit sur papier ou papier-toile à échelle réduite, soit à la salle des gabarits en vraie grandeur, il est nécessaire de relever exactement tous les éléments de ce plan sur un cahier appelé *devis de tracé,* qui servira dans la suite à toute reproduction du plan ou à toute détermination précise de dimensions. Une fois le relevé fait et consigné sur le devis, le plan primitif, dont les données sont toujours plus ou moins altérées avec le temps, par suite des déformations ou des pliures du papier ou par suite de disparition accidentelle des traits, ne doit plus servir aux mesures précises de longueurs.

On doit indiquer sur le devis si les relevés ont été pris sur un plan de formes, et, dans ce cas, on doit se contenter de deux décimales dans la lecture des ordonnées, car il serait difficile et superflu de les apprécier à moins de 25^{mm}, c'est-à-dire à moins d'une demi-division des règles graduées généralement employées; ou bien si ces relevés ont été pris sur le plan en vraie grandeur tracé à la salle des gabarits pour la construction, auquel cas on peut, sans difficulté, mesurer les ordonnées au millimètre près et inscrire leurs valeurs avec trois décimales.

Les ordonnées, dont il est question, sont celles, par rapport au longitudinal pris comme plan de projection, des points de la demi-carène situés aux intersections des couples et des lignes d'eau.

Elles peuvent être indifféremment relevées sur le plan horizontal ou sur le vertical. L'inscription de leurs valeurs sur le longitudinal aux intersections des couples et des lignes d'eau transformerait ce plan de projection en un véritable plan coté, dont les sections longitudinales seraient les lignes de niveau.

Le devis de tracé doit se rapporter à tout l'ensemble du navire et être disposé avec méthode; on y inscrit tous les renseignements propres à faciliter le tracé du plan des formes, tels que :

Légende complète des dimensions principales;
Coordonnées du contour des extrémités sur le longitudinal;
Hauteurs à chaque couple des lignes droites des différents livets;
Bouge des divers ponts;
Emplacement des mâts, cheminées, sabords, etc.;
Données sur le contour de la cuirasse;
Données pour le tracé du gouvernail, des hélices et accessoires, cages, étambots, étraves, etc.;
Ordonnées ou demi-ouvertures des couples, faux couples et couples auxiliaires;
Demi-ouvertures des lignes d'eau et des livets;
Demi-ouvertures de certaines lisses dont les tracés sont indiqués avec soin;
Coordonnées des sections longitudinales aux extrémités.

Il est difficile d'établir un modèle uniforme de devis de tracé, car les exigences varient avec les formes et les types de navires; on ne peut que recommander la méthode et la précision dans les indications et rappeler qu'un devis n'est jamais trop complet.

Le devis de tracé, relevé à la salle, est l'élément le plus important du dossier d'un navire; et, afin de faciliter le groupement des différentes pièces de ce dossier toujours très volumineux, il est prescrit aujourd'hui, dans la Marine de l'État, de lui donner le format adopté pour les plans pliés et Tableaux divers (format dit *tellière*).

44. Correction, pour les calculs, des aboutissements des lignes.

Si toutes les lignes d'eau aboutissaient aux perpendiculaires extrêmes et tous les couples à la ligne d'eau zéro; si, d'autre part, les formes de ces lignes d'eau et couples aux extrémités étaient bien régulières, au lieu d'être généralement contournées, on résoudrait tous les calculs à effectuer en employant simplement les

ordonnées relevées sur les 11 lignes d'eau et sur les 21 couples de tracé et consignées au devis de tracé. Or il est rare que les lignes d'eau aboutissent sur les perpendiculaires : il faudrait donc pour le calcul de chaque ligne d'eau faire une nouvelle division de sa longueur en 20 parties égales ; pour les couples, il n'y a que le couple milieu en général qui aboutisse sur la ligne d'eau 0 : il faudrait donc faire aussi une nouvelle division en 10 parties égales de la hauteur de chaque couple. Au lieu de cela, on préfère modifier les extrémités ou aboutissements de la ligne d'eau et du couple, tout en conservant à ces courbes la même surface.

1° Occupons-nous d'abord des *extrémités contournées* aboutissant exactement sur les divisions extrêmes. Les étraves et étambots n'étant pas considérés comme appendices calculables à part, leurs sections entrent dans le calcul des lignes d'eau, de telle sorte que l'extrémité d'une flottaison peut affecter la forme représentée *fig.* 55 et *fig.* 56. Il n'y a pas alors d'autre ressource que de substituer au tracé réel celui d'une ligne d'eau de même surface à l'appréciation de l'opérateur : AMN, par exemple, pour ABC (*fig.* 55), FPQ pour FED (*fig.* 56).

Fig. 55.

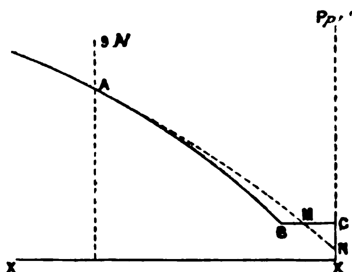
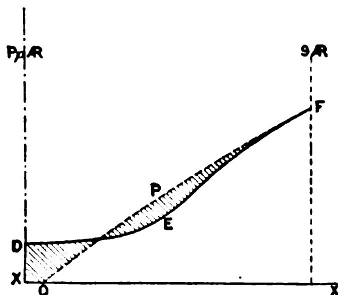


Fig. 56.



De même, dans le cas d'une *extrémité à très forte courbure*, telle que l'aboutissement d'un couple du milieu, on substituera (*fig.* 57) un tracé simple, une droite par exemple GHI, à l'arc GIJ.

Dans les plans de formes de certains navires, tels que les gardes-côtes cuirassés, on rencontre, à l'arrière, des lignes d'eau et des couples à *extrémités sinueuses* coupant quelques ordonnées de division en plusieurs points (*fig.* 58 et 59). Il va sans dire que la première chose à faire en ce cas est de multiplier dans cette région

les ordonnées de division, ce qui n'introduit que peu de modifications dans les calculs. Cela fait, de deux choses l'une, ou bien les tangentes perpendiculaires à la base coïncident avec des ordonnées de division, ou ces tangentes tombent entre des ordon-

Fig. 57.

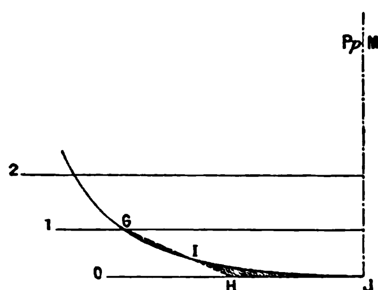
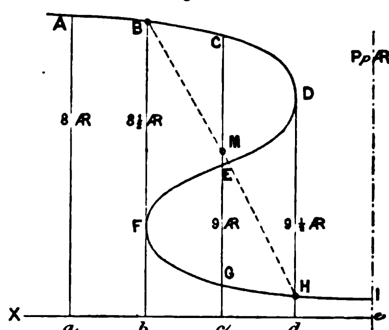


Fig. 58.



nées. Dans le premier cas, on portera, par exemple, GM = EC et l'on substituera un contour ABMHI (*fig.* 58) au contour ABCDEFGHI. Dans le second cas, il faut opérer une correction entièrement livrée à l'appréciation du calculateur. Un procédé très rationnel consisterait à arrêter les calculs à l'ordonnée 8 ½ Æ (*fig.* 59) et à mesurer au planimètre la surface restante.

Fig. 59.

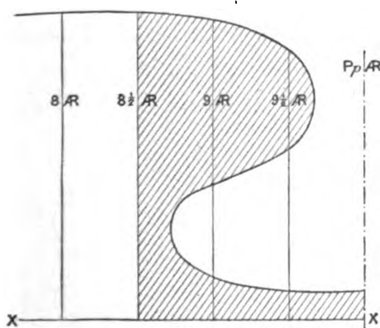
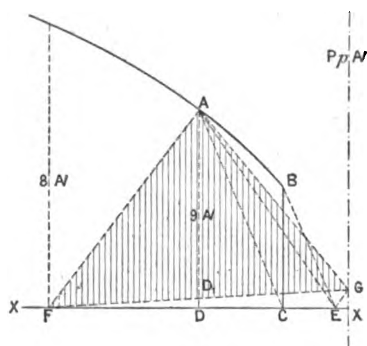


Fig. 60.



2° Considérons maintenant le cas où les lignes d'eau et couples ne se terminent plus sur les divisions extrêmes, et prenons pour exemples les trois formes d'aboutissement des *fig.* 60, 61 et 62, qui se présentent le plus souvent en pratique. Une première opération consistera à transformer la portion de la courbe qui dépasse

la dernière de ses ordonnées en un triangle rectiligne ayant un de ses côtés sur XX ; pour cela on mènera une simple ligne comme A″E″ (*fig.* 62), ou bien on tracera AC, puis BE parallèle à AC, puis on joindra AE; les deux triangles AEC et ABC étant équivalents, le triangle AED est équivalent à la portion de courbe ABCD (*fig.* 60) ou A′E′D′ à A′B′C′D′ (*fig.* 61). Cela fait, on joint AF

Fig. 61.

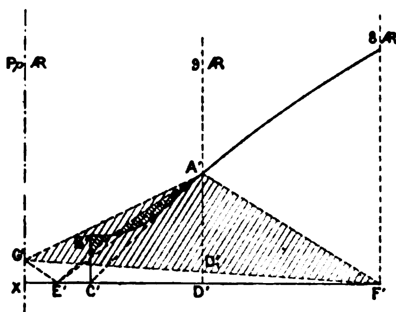
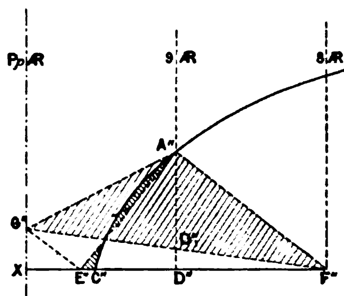


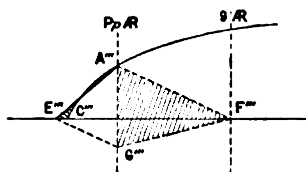
Fig. 62.



et l'on transforme le triangle AFE en un triangle équivalent, mais ayant son sommet sur la dernière division. Il n'y a pour cela qu'à mener par E une parallèle à AF jusqu'à la rencontre de la dernière division en G, et à prendre le point G pour nouveau sommet du triangle dont la base est AF.

De cette façon, quand la ligne d'eau réelle se termine en dedans des divisions extrêmes, comme dans les *fig.* 60, 61 et 62, l'ordonnée extrême y'_{10} de la courbe transformée est nulle. Il n'en est plus de même si la ligne d'eau se termine au delà de la division

Fig. 63.



extrême, comme dans la *fig.* 63. Ici on a, en effet, $y'_{10} =$ A‴G‴, mais c'est alors y'_9 qui reste égal à y_9, valeur portée sur le devis de tracé, tandis que dans le premier cas on a $y'_9 =$ AD$_1$, au lieu de $y_9 =$ AD.

45. Remarque sur les corrections d'aboutissement au point de vue du calcul des moments et des moments d'inertie de l'aire de la courbe.

Quand on transforme une courbe contournée, telle que celle de la *fig.* 58, et qu'on lui substitue un autre tracé plus simple, on n'altère sensiblement ni l'aire de la courbe, ni son moment, ni son moment d'inertie par rapport à l'axe des y; mais on ne saurait se servir de la courbe corrigée pour le calcul du moment et du moment d'inertie de l'aire par rapport à l'axe des x. Ainsi, dans le cas de la *fig.* 58, il faudra se garder de prendre en c, pour calculer le moment par rapport à XX, $\overline{cM}^2$, et, pour le moment d'inertie, $\overline{cM}^3$; il faudra prendre respectivement $\overline{cC}^2 - \overline{cE}^2 + \overline{cG}^2$ et $\overline{cC}^3 - \overline{cE}^3 + \overline{cG}^3$; autrement dit, pour le moment par rapport à XX, il faudrait substituer à la courbe réelle une seconde courbe corrigée dont les ordonnées en chaque point seraient, non plus $\overline{cM}$, mais $\sqrt{\overline{cC}^2 - \overline{cE}^2 + \overline{cG}^2}$, et, pour le moment d'inertie, une troisième courbe corrigée dont les ordonnées seraient

$$\sqrt[3]{\overline{cC}^3 - \overline{cE}^3 + \overline{cG}^3}.$$

D'une façon générale, nous avons vu que la correction d'aboutissement revenait à prendre $y_{10} = 0$ et $y_9(1-\alpha) = \text{AD}_1$, au lieu de $y_9 = \text{AD}$, dans la sommation de l'aire

$$\text{A} = a\left(\frac{1}{2}y_0 + y_1 + \ldots + y_9 + \frac{1}{2}y_{10}\right),$$

qui devient

$$(m) \qquad \text{A} = a\left[\frac{1}{2}y_0 + y_1 + \ldots + y_9(1-\alpha)\right],$$

en posant $\text{DD}_1 = \alpha \times \text{AD}$ (*fig.* 64).

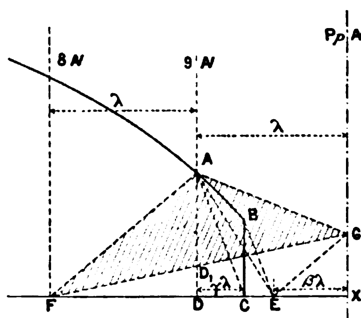
Si nous construisions des courbes auxiliaires ayant pour ordonnées ky_k, k^2y_k, y_k^2, y_k^3, il suffirait d'en évaluer l'aire, c'est-à-dire de faire la sommation ci-dessus, pour avoir le moment et le moment d'inertie par rapport à Oy, le moment et le moment d'inertie par rapport à Ox. Or le dernier terme de la formule (m), qui, dans

chaque cas, deviendrait

$$9y_9(1-\alpha'),\quad 9^2y_9(1-\alpha''),\quad y_9^2(1-\alpha'''),\quad y_9^3(1-\alpha^{\text{iv}}),$$

serait différent de celui qu'on obtiendrait en employant seulement

Fig. 64.



l'ordonnée corrigée $y_9(1-\alpha)$ au lieu de y_9; car alors les derniers termes seraient

$$9y_9(1-\alpha),\quad 9^2y_9(1-\alpha),\quad y_9^2(1-\alpha)^2,\quad y_9^3(1-\alpha)^3.$$

Cherchons, en effet, les valeurs de α', α'', α''', α^{iv} en fonction de α.

Les deux triangles FDD_1 et FXG donnent

$$(1)\qquad \overline{XG} = 2\overline{DD_1} = 2\alpha y_9.$$

D'autre part, les deux triangles CBE, DAC fournissent, en posant $\overline{BC} = a$, la relation

$$(2)\qquad \frac{a}{y_9} = \frac{\lambda(1-\beta-\gamma)}{\lambda\gamma} = \frac{1-\beta-\gamma}{\gamma}.$$

Enfin les triangles EGX et FAD donnent

$$(3)\qquad \frac{\overline{XG}}{y_9} = \frac{\beta\lambda}{\lambda} \quad \text{ou} \quad \overline{XG} = \beta y_9.$$

En associant (3) et (1), on obtient $\beta = 2\alpha$ qui, portée dans (2), donne

$$\frac{2\alpha}{\gamma} = \frac{(1-\gamma)}{\gamma} - \frac{a}{y_9}$$

ou

$$\alpha = \frac{1}{2}(1-\gamma) - \frac{\gamma}{2}\frac{a}{y_9}$$

ou

$$1-\alpha = \frac{1}{2} + \frac{\gamma}{2} + \frac{\gamma}{2}\frac{a}{y_9},$$

et, pour les courbes auxiliaires où γ et λ conservent la même valeur, mais où a et y_9 changent et deviennent $(9+\gamma)a$ et $9y_9$; ou $(9+\gamma)^2 a$ et $9^2 y_9$; ou a^2 et y_9^2 ; ou enfin a^3 et y_9^3,

$$1-\alpha' = \frac{1}{2} + \frac{\gamma}{2} + \frac{\gamma}{2}\frac{a'}{y'_9} = \frac{1}{2} + \frac{\gamma}{2} + \frac{\gamma}{2}\frac{a}{y_9}\frac{9+\gamma}{9},$$

$$1-\alpha'' = \frac{1}{2} + \frac{\gamma}{2} + \frac{\gamma}{2}\frac{a''}{y''_9} = \frac{1}{2} + \frac{\gamma}{2} + \frac{\gamma}{2}\frac{a}{y_9}\left(\frac{9+\gamma}{9}\right)^2,$$

$$1-\alpha''' = \frac{1}{2} + \frac{\gamma}{2} + \frac{\gamma}{2}\frac{a'''}{y'''_9} = \frac{1}{2} + \frac{\gamma}{2} + \frac{\gamma}{2}\left(\frac{a}{y_9}\right)^2,$$

$$1-\alpha^{\text{iv}} = \frac{1}{2} + \frac{\gamma}{2} + \frac{\gamma}{2}\frac{a^{\text{iv}}}{y_9^{\text{iv}}} = \frac{1}{2} + \frac{\gamma}{2} + \frac{\gamma}{2}\left(\frac{a}{y_9}\right)^3.$$

Or, si la courbe aboutit sur l'axe des x ou tout près de l'axe des x, c'est-à-dire si $\frac{a}{y_9}$ est nul ou très petit, on déduit des relations trouvées

$$9\,y_9(1-\alpha') = 9\,y_9\left(\frac{1}{2} + \frac{\gamma}{2}\right) = 9\,y_9(1-\alpha),$$

$$9^2 y_9(1-\alpha'') = 9^2 y_9\left(\frac{1}{2} + \frac{\gamma}{2}\right) = 9^2 y_9(1-\alpha),$$

$$\left.\begin{aligned} y_9^2(1-\alpha''') &= y_9^2\left(\frac{1}{2} + \frac{\gamma}{2}\right) \gtrless y_9^2\left(\frac{1}{2} + \frac{\gamma}{2}\right)^2 \gtrless y_9^2(1-\alpha)^2 \\ y_9^3(1-\alpha^{\text{iv}}) &= y_9^3\left(\frac{1}{2} + \frac{\gamma}{2}\right) \gtrless y_9^3\left(\frac{1}{2} + \frac{\gamma}{2}\right)^3 \gtrless y_9^3(1-\alpha)^3 \end{aligned}\right\} \text{ suivant que } \gamma \text{ est } \lessgtr 1.$$

On est donc fondé à dire, comme nous l'avons fait, qu'en général l'emploi de la correction d'aboutissement n'altère sensiblement, ni le moment, ni le moment d'inertie de l'aire par rapport à Oy, mais qu'il peut altérer plus ou moins gravement le moment et le moment d'inertie par rapport à Ox. Géométriquement, on se rend compte de suite des déplacements dans la position du centre de carène, qui résultent des substitutions de forme effectuées par les corrections d'aboutissement. En effet, si l'on se sert des lignes d'eau corrigées, on obtiendra très sensiblement par intégration le volume de carène exact et la position exacte en hauteur du centre de ce volume; mais, comme on a altéré les lignes d'eau dans leur plan, on n'obtiendra la position en longueur, ou

par rapport au couple milieu, du centre de carène qu'avec une altération correspondante. Si, au contraire, on se sert des couples corrigés, on obtiendra exactement le volume et la position en longueur du centre de carène ; mais on aura généralement déplacé ce centre de carène en hauteur.

On s'attache, pour les corrections d'aboutissements, à ne corriger, dans une même région de la carène, qu'un seul réseau de courbes, les lignes d'eau dans la partie haute, les couples dans la partie basse. La correction sur les lignes d'eau déforme la carène aux extrémités ; à l'arrière, les lignes d'eau se renflent en général sur la perpendiculaire Æ, sur laquelle la courbe des aires des couples MN (*fig.* 65) aboutit avec une ordonnée OA trop grande et qui forme en quelque sorte l'ordonnée corrigée de la courbe réelle MN.

Fig. 65.

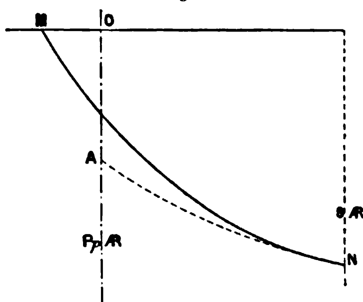
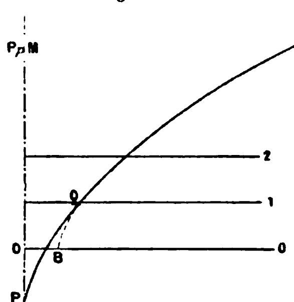


Fig. 66.



De même, la correction sur les couples renfle la première tranche de la carène, et la courbe des aires des lignes d'eau PQ (*fig.* 66) prend sur la ligne d'eau zéro une ordonnée trop grande OB, mais s'y arrête au lieu d'aller aboutir en P au pied de l'étambot, et cette ordonnée OB forme en quelque sorte l'ordonnée corrigée de la courbe réelle PQ.

46. Disposition des Tableaux de calculs pour une carène droite limitée à la flottaison en charge et en différence (*voir* p. 98 et suiv.).

Les calculs numériques ou Tableaux de calculs de la carène droite se font sur un cahier spécial, distinct du devis de tracé, et avec les ordonnées corrigées des aboutissements. Malgré la remarque que nous avons faite au sujet du calcul des moments avec

les ordonnées corrigées, on se contente le plus souvent d'appliquer à ces ordonnées corrigées toutes les opérations.

Dans les arsenaux de l'État les calculs se font sur des imprimés réglementaires établis en vue de l'emploi de la méthode des trapèzes, décrite nos 6 et 9, et du mode de division dont nous avons parlé (longueur $\Lambda = 20\,\lambda$, profondeur de carène $p = 10\,h$). Si l'on était exceptionnellement conduit à ajouter des sections supplémentaires aux extrémités, il faudrait changer légèrement la contexture des Tableaux, dont les dispositions principales subsisteraient, bien entendu.

Les imprimés pour calculs ayant le format des dossiers des navires sont aisément réunis aux plans pliés et au devis de tracé.

Ces Tableaux sont au nombre de sept que nous allons successivement passer en revue.

Tableau I. — Le Tableau I renferme les dimensions principales de la carène limitée à la flottaison en charge (Fl. 10).

Le relevé des dimensions principales ne demande aucune explication complémentaire : la signification et la définition des différents termes ont été précédemment indiquées.

Tableau II. — Dans ce Tableau et les suivants, la carène est supposée s'étendre jusqu'à la 11e ligne d'eau, bien qu'elle doive en principe s'arrêter à la 10e. Dans la pratique, les prévisions sont souvent dépassées, soit que les évaluations aient été faites trop parcimonieusement, soit que le chargement, l'armement, ou même le poids de coque aient été accrus pour satisfaire à des exigences nouvelles. Les Tableaux et les plans des formes doivent donc supposer une certaine augmentation possible de l'immersion du navire. D'ailleurs, certains résultats particuliers à la flottaison 10 et à la carène qu'elle limite sont l'objet de Tableaux spéciaux.

Le Tableau II est à double entrée : les colonnes verticales contiennent les ordonnées (en mètres) des lignes d'eau ; les colonnes horizontales celles des couples. On a soin, pour satisfaire à la méthode des trapèzes, de n'inscrire, dans chaque colonne verticale et horizontale, que la moitié des ordonnées extrêmes, de sorte que le cadre du Tableau ne contient que des demi-ordonnées, et les quatre angles des quarts d'ordonnées. On réalise ainsi le Tableau

de facteurs qui convient au calcul de la formule symbolique $\sum_0^m \sum_0^n (z)$ (*voir* n° 9).

En additionnant les chiffres de la $k^{\text{ième}}$ colonne verticale, on obtient une somme $\sum(z_k)$ qui, multipliée par λ, donnera l'aire de la demi-ligne d'eau k, et, par 2λ, l'aire de la ligne d'eau k entière. On aura donc

$$\text{aire ligne d'eau } k = 2\lambda \sum(z_k) = \frac{\Lambda}{10} \Sigma_k.$$

En additionnant les chiffres de la $p^{\text{ième}}$ colonne horizontale, on obtiendra une autre somme $S_p = \sum(z_p)$ qui, multipliée par $2h$, donnera l'aire limitée à la flottaison 11 du $p^{\text{ième}}$ couple ; donc

$$\text{aire limitée à } \mathrm{Fl}_{11} \text{ du } p^{\text{ième}} \text{ couple} = 2h\,S_p.$$

On remarquera que les colonnes extrêmes formant cadres, multipliées par 2λ ou $2h$ suivant le cas, donnent seulement les demi-aires des lignes d'eau et couples extrêmes.

En ajoutant les Σ, on devra trouver le même chiffre qu'en ajoutant les S. Il doit être recommandé d'ailleurs de mettre en courbes les valeurs des Σ (courbe des aires des lignes d'eau au facteur constant 2λ près) et les valeurs des S (courbe des aires des couples au facteur constant $2h$ près); car la mise en courbes des résultats d'opérations numériques est la meilleure garantie contre les erreurs grossières qui auraient pu se glisser dans les calculs.

Au bas du Tableau II, on effectue le produit des différentes sommes Σ_k par l'indice correspondant k. On obtient ainsi, au facteur $2h\lambda$ près, les moments des lignes d'eau par rapport à la flottaison inférieure Fl_0 ; en effet,

$$\mathrm{M}_{\mathrm{Fl}_0}(\text{aire ligne d'eau } k) = kh.2\lambda\,\Sigma_k = 2h\lambda.k\,\Sigma_k.$$

Tableau III. — Pour débarrasser les calculs de ce Tableau et des Tableaux suivants des facteurs constants h et λ, on fait momentanément intervenir une carène fictive où ces équidistances h et λ sont toutes deux égales à l'unité de longueur adoptée (1^{m}), quitte à calculer plus tard dans chaque cas la valeur du facteur négligé qu'il faudra ensuite rétablir.

Pour la carène fictive, on a

$$\Sigma_k = \tfrac{1}{2} \text{ aire de la } k^{\text{ième}} \text{ ligne d'eau} = \sum (z_k),$$

$$S_p = \tfrac{1}{2} \text{ aire du } p^{\text{ième}} \text{ couple limité à } Fl_{11} = \sum (z_p),$$

$$V_{11} = \tfrac{1}{2} \text{ volume de la carène limitée à } Fl_{11}$$

$$= \sum (\Sigma_k) = \left(\frac{\Sigma_0}{2} + \Sigma_1 + \Sigma_2 + \ldots + \Sigma_{10} + \frac{\Sigma_{11}}{2}\right)$$

$$= \sum (S_p) = \left(\frac{S_{10}}{2} + S_9 + S_8 + \ldots + S_1 + S_0 + S'_1 + \ldots + S'_8 + S'_9 + \frac{S'_{10}}{2}\right),$$

$$m_{11} = \tfrac{1}{2} \text{ moment de la carène par rapport à } Fl_0$$

$$= \sum (k\Sigma_k) = \left(0 \cdot \frac{\Sigma_0}{2} + \Sigma_1 + 2\Sigma_2 + \ldots + 10\Sigma_{10} + 11\,\frac{\Sigma_{11}}{2}\right).$$

Le Tableau III sert à calculer les volumes des demi-carènes fictives et les ordonnées des centres de ces volumes, ainsi que le volume des demi-tranches comprises entre les flottaisons successives.

Sur le Tableau III, la colonne verticale n° 1 indique le numérotage des couples et en même temps les facteurs k.

Les autres colonnes se subdivisent en travées, par groupes de trois; chaque travée se rapportant aux carènes limitées par une flottaison déterminée.

La première travée (colonnes 2, 3 et 4) a trait à la flottaison 11.

Dans la colonne 2, on reproduit les demi-aires des couples limitées à la flottaison 11, c'est-à-dire les sommes horizontales S_k du Tableau II, les extrêmes se trouvant par avance divisés par 2.

Chaque valeur S_k étant ensuite, dans la colonne 3, multipliée par son indice k, on additionne ces produits pour la partie avant et pour la partie arrière, ce qui donne les moments par rapport au couple milieu des demi-volumes AV et AR

$$M'_{11} = \sum (kS_k)_0^{AV},$$

$$M''_{11} = \sum (kS_k)_0^{AR},$$

$$M_{11} = M'_{11} - M''_{11}.$$

Si la différence M_{11} est positive, c'est que le centre de carène est sur l'avant du milieu, ou inversement. Sa distance au milieu

(abscisse du centre de carène) a pour valeur $\xi_{11} = \frac{M_{11}}{V_{11}}$; V_{11} (déjà obtenu dans le Tableau II) n'est, d'ailleurs, autre chose que la somme des chiffres de la colonne 2.

On profite de ce que le produit kS_k est toujours nul pour le couple milieu et l'on inscrit en ses lieu et place les valeurs de M', $(M'_{11}, M'_{10}, \ldots)$.

En prenant dans le Tableau II la valeur de m_{11} et en divisant par V_{11}, on obtient la hauteur ζ_{11} du centre de carène au-dessus de la ligne d'eau zéro, qu'on inscrit au-dessous de ξ_{11},

$$\zeta_{11} = \frac{m_{11}}{V_{11}}.$$

La colonne 4 est relative à la demi-tranche de carène comprise entre les flottaisons 11 et 10. On la forme en inscrivant dans chaque ligne horizontale, c'est-à-dire pour chaque couple, la moyenne de ses ordonnées aux flottaisons 11 et 10. Chacune de ces demi-sommes mesure, dans la carène fictive, la demi-aire interceptée sur ce couple par les flottaisons 10 et 11. En additionnant ces demi-aires, on obtient le volume de la demi-tranche, T_{11}, limitée en haut à la flottaison 11.

Passons à la seconde travée (colonnes 5, 6, 7).

En retranchant, dans chaque ligne horizontale, les chiffres de la colonne 4 de ceux de la colonne 2 et en inscrivant la différence dans la colonne 5, on obtient dans chaque ligne horizontale la demi-aire du couple limité à la flottaison 10. La somme de la colonne 5 donnera donc V_{10}. En multipliant ensuite chaque ligne de la colonne 5 par son indice, on aura les termes kS_k pour chaque couple limité à la flottaison 10, et la somme donnera M'_{10} et M''_{10}; d'où l'on tirera l'abscisse ξ_{10} du centre du volume V_{10} en avant de la perpendiculaire milieu. Pour calculer $\zeta_{10} = \frac{m_{10}}{V_{10}}$, on commencera par déduire m_{10} de m_{11}. On a, en effet,

$$m_{11} = \sum_0^{11} k\Sigma_k = \left(\ldots + 10\,\Sigma_{10} + 11\,\frac{\Sigma_{11}}{2}\right),$$

$$m_{10} = \sum_0^{10} k\Sigma_k = \left(\ldots + 10\,\frac{\Sigma_{10}}{2}\right);$$

d'où

$$m_{11} - m_{10} = 11\,\frac{\Sigma_{11}}{2} + 10\,\frac{\Sigma_{10}}{2} = 10\left(\frac{\Sigma_{11}}{2} + \frac{\Sigma_{10}}{2}\right) + \frac{\Sigma_{11}}{2} = 10\,T_{11} + \frac{\Sigma_{11}}{2},$$

d'où enfin

$$m_{10} = m_{11} - \left(\frac{\Sigma_{11}}{2} + 10\,T_{11} \right).$$

De la carène limitée à la flottaison 10 on passe à celle limitée par la flottaison 9, par la même série d'opérations qui nous a permis de déduire la carène 10 de la carène 11, et ainsi de suite jusqu'à la dernière.

En résumé, le Tableau III, traduit en courbes, donne :

1° La courbe des volumes V_k des demi-carènes fictives successives;

2° La courbe des volumes T_k des demi-tranches fictives ou des demi-volumes moyens $\frac{T_k}{100}$ par centimètre d'immersion à chaque tranche;

3° Les courbes des abscisses ξ_k et des ordonnées ζ_k des centres des carènes successives;

4° Les courbes des demi-aires de chaque couple limitées aux flottaisons successives (colonnes 2, 5, 8, ..., $3n+2$). Ces courbes sont les courbes intégrales du premier ordre des contours des couples. Leur ensemble forme une espèce de Vertical de navire que nous appellerons le *Vertical intégral*. Il donne pour une flottaison quelconque les ordonnées de la courbe des aires des couples limitées par cette flottaison. Pour avoir un réseau bien continu, on calcule directement sur le plan de formes, avant toute correction d'aboutissement des lignes d'eau, les courbes intégrales relatives aux couples 9*A* et 10*Æ*. De même, pour se mettre à l'abri des anomalies de tracé dues aux corrections d'aboutissement des couples dans les fonds, on fait partir ces courbes du point d'aboutissement réel du couple et non de la flottaison 0.

Tableau IV. — Le Tableau IV sert à effectuer les calculs relatifs aux diverses lignes d'eau de la carène fictive. Pour chacune d'elles, il faut calculer la demi-surface Σ_k (ce qui a déjà été fait dans le Tableau II), l'abscisse Γ_k du centre de gravité de cette aire en avant de la perpendiculaire milieu, et les demi-moments d'inertie : I_k par rapport à l'axe principal d'inertie parallèle à l'axe transversal milieu et i_k par rapport à l'axe principal d'inertie parallèle à l'axe longitudinal. En effet, les axes de coordonnées sont parallèles pour chaque ligne d'eau droite à ses axes principaux d'inertie, comme nous le verrons en Géométrie, n° 84.

Au point de vue des calculs, chaque flottaison est indépendante des autres et possède en propre une travée de quatre colonnes.

Dans une colonne spéciale verticale placée en abord, on inscrit les indices des couples, qui servent de facteurs pour chacune des lignes d'eau.

Dans la colonne 2 sont les ordonnées de la ligne d'eau 11, prises dans le Tableau II, mais débarrassées des facteurs $\frac{1}{2}$ ou $\frac{1}{4}$ dont elles sont affectées sur ce Tableau.

Dans la colonne 3 se trouvent les produits des ordonnées par les facteurs (les produits extrêmes sont ici divisés par 2). La somme des chiffres de cette colonne, effectuée séparément pour la partie avant et pour la partie arrière, fournit deux moments D'_{11} et D''_{11}, dont la différence est le moment par rapport à l'axe transversal milieu D_{11} de la demi-ligne d'eau fictive 11. L'abscisse Γ_{11} du centre de gravité de l'aire de la ligne d'eau en avant du milieu est donc $\Gamma_{11} = \frac{D_{11}}{\Sigma_{11}}$, et, pour cette opération, on a soin de prendre la valeur de Σ_{11} dans le Tableau II.

La colonne 4 est obtenue en multipliant chacun des produits de la colonne 3 par les facteurs; on obtient ainsi des termes de la forme $k^2 z_k$. Les deux extrémités se trouvant réduites de moitié, l'addition donnera le moment d'inertie Q_{11} de la demi-flottaison fictive par rapport à l'axe transversal milieu. Pour passer de Q_{11} à I_{11}, qui est le moment d'inertie de la demi-flottaison par rapport à un axe transversal passant par le centre de gravité, il faut introduire un terme correctif; car on sait que l'on a

$$\begin{aligned} I_{11} &= Q_{11} - \Sigma_{11}\Gamma_{11}^2, \\ &= Q_{11} - D_{11}\Gamma_{11}. \end{aligned}$$

Ce moment d'inertie I_{11} sert à calculer une fonction, appelée *grand rayon métacentrique initial,* dont nous verrons la signification et l'utilité dans l'étude de la stabilité. Nous verrons, en effet, que ce grand rayon R_{11} est égal au quotient

$$R_{11} = \frac{I_{11}}{V_{11}},$$

quotient que l'on effectue en prenant V_{11} dans le Tableau III.

Dans la colonne 5, on inscrit les cubes des ordonnées, en

divisant par 2 les cubes des ordonnées extrêmes. L'addition C_{11} donnera le triple de i_{11}, car $i_{11} = \frac{1}{3}\sum(z_k^3) = \frac{C_{11}}{3}$.

Ce moment d'inertie de la demi-ligne d'eau par rapport à l'axe longitudinal sert à calculer une fonction, appelée *petit rayon métacentrique initial* r_{11},

$$r_{11} = \frac{i_{11}}{V_{11}} = \frac{C_{11}}{3V_{11}}.$$

Pour les autres lignes d'eau, on opère exactement de même dans les travées suivantes du Tableau IV. On traduit ensuite en courbes les résultats.

Tableau V. — Le Tableau V renferme l'application à la carène réelle sans appendices des résultats obtenus dans les Tableaux précédents pour la carène fictive. On passe d'une carène à l'autre par l'emploi des facteurs λ et h, que l'on combine de la manière suivante :

	Carène fictive.	Carène réelle sans appendices.	Facteurs.
1° Aire d'un couple........	$2S_k$	$2hS_k$	h
2° Aire d'une ligne d'eau ...	$2\Sigma_k$	$2\lambda\Sigma_k$	λ
3° Volume de carène par les couples...............	$2\sum(S_k)$	$\lambda\sum(2hS_k) = 2\lambda h\sum(S_k)$	λh
4° Volume de carène par les lignes d'eau...........	$2\sum(\Sigma_k)$	$\sum(2\lambda\Sigma_k) = 2\lambda h\sum(\Sigma_k)$	λh
5° Distance du centre de carène en avant du milieu..................	$\xi = \frac{M}{V}$	$\frac{\lambda\sum(2hS_k k\lambda)}{2\lambda h\sum(S_k)} = \frac{\lambda 2h\lambda\sum(kS_k)}{2\lambda h\sum(S_k)} = \lambda\xi$	λ
6° Distance du centre de carène à la ligne d'eau o.	$\zeta = \frac{m}{V}$	$\frac{h\sum(2\lambda\Sigma_k hk)}{2\lambda h\sum(\Sigma_k)} = \frac{h2\lambda h\sum(k\Sigma_k)}{2\lambda h\sum(\Sigma_k)} = h\zeta$	h
7° Distance du centre de gravité des lignes d'eau en avant du milieu....	$\Gamma = \frac{D}{\Sigma}$	$\frac{\sum(2z_k\lambda k\lambda)}{\sum(2z_k\lambda)} = \frac{2\lambda^2\sum(kz_k)}{2\lambda\Sigma_k} = \lambda\Gamma$	λ

	Carène fictive.	Carène réelle sans appendices.	Facteurs.
8° Grand rayon métacentrique initial...........	$R = \frac{I}{V}$	$\frac{\sum(2z_k\lambda)(k\lambda)^2 - 2\lambda\Sigma_k\lambda^2\Gamma^2}{2\lambda h\sum(\Sigma_k)}$	
		$= \frac{2\lambda\lambda^2\sum(k^2 z_k) - 2\lambda\lambda^2\Sigma_k\Gamma^2}{2\lambda h\sum\Sigma_k} = \frac{\lambda^2}{h}R$	$\frac{\lambda^2}{h}$
9° Petit rayon métacentrique initial.................	$r = \frac{i}{V}$	$\frac{2\sum(z_k^3\lambda)}{3.2\lambda h\sum(\Sigma_k)} = \frac{2\lambda}{3.2\lambda h}\frac{\sum(z_k^3)}{V} = \frac{1}{h}r$	$\frac{1}{h}$

A la partie inférieure du Tableau V, on inscrit quelques rapports utiles pour la comparaison des formes de carène.

Tableau VI. — Le Tableau VI renferme le calcul des appendices et permet ainsi de passer de la carène réelle nue à la carène réelle complète. Ces appendices (laissés de côté jusqu'ici et qu'il s'agit de rétablir) sont :

Quille et fausse quille centrales,
Quilles latérales,
Hélices, tubes et supports,
Gouvernail (partie située sur l'Æ de la PpÆ).

Les annotations de ce Tableau indiquent que les volumes des quilles et fausses quilles doivent être attribués à la première tranche; que, pour les navires à deux hélices, les volumes des hélices et de leurs accessoires sont supposés concentrés sur les axes des propulseurs et s'ajoutent à la tranche de la carène qui comprend ces axes; que, pour les navires à hélice unique, on admet, comme une approximation suffisante en pratique, que le vide de la cage d'hélice est compensé par le volume de l'hélice, et que, par suite, on doit supposer la cage pleine et ne pas tenir compte de l'hélice; que le volume du ou des gouvernails doit être supposé concentré en leur centre de figure et ajouté à la tranche de la carène comprenant ce dernier point.

Tableau VII. — Le septième et dernier Tableau donne les ré-

sultats pour la carène réelle avec appendices. On y fait figurer, outre le déplacement moyen d'une tranche par centimètre, le déplacement par centimètre à la surface supérieure de chaque ligne d'eau ou $\Sigma_k . 0^m,01 . 1^t,026$. Les déplacements se déduisent d'ailleurs des volumes, en multipliant ces derniers par le poids moyen adopté ($1^t,026$ ou 1026^{kg}) du mètre cube d'eau de mer.

Les calculs complets du Tableau VII sont traduits en courbes comme ceux des Tableaux II, III et IV; mais, comme ces courbes, caractéristiques de la carène complète avec appendices, ont une grande importance, on les trace sur le plan des formes, comme nous allons le dire au n° 47 ci-après, et l'on inscrit sur ce plan le Tableau VII lui-même qui a servi à tracer les courbes.

L([1])

CALCULS DE DÉPLACEMENT ET DE STABILITÉ.

DIMENSIONS PRINCIPALES DU BATIMENT. TABLEAU I.

Longueur entre perpendiculaires, de l'axe du gouvernail à l'extrémité avant de la carène (contour extérieur de l'étrave à la flottaison, ou pointe de l'éperon)..	$\Lambda =$	
Longueur à la flottaison en charge (ligne d'eau n° 10).	$L' =$	
Longueur de la carène, de la perpendiculaire AV à la face AR de l'étambot AV...........................	$L =$	
Largeur extérieure de la carène au fort, situé à au-dessus ou au-dessous de la flottaison en charge.	l	
Largeur extérieure maxima en charge..............	$l' =$	
Creux sur fond de carène, au milieu, à la ligne droite des baux du pont supérieur......................	$c =$	
Profondeur de carène, au milieu, correspondant à la flottaison en charge..............................	$p =$	
Tableau de la quille et de la fausse quille au milieu.	$q =$	
Tirants d'eau en charge — à la perpendiculaire AR...		
Tirants d'eau en charge — à la perpendiculaire AV...		
Tirants d'eau en charge — à la perpendiculaire M...	$p+q =$	
Tirants d'eau en charge — Différence...............	$\Delta =$	
Assiette prévue....................................	$\frac{\Delta}{\Lambda} =$	
Équidistance des sections verticales ou couples......	$\lambda = \frac{\Lambda}{20} =$	
Équidistance des sections horizontales ou lignes d'eau.	$h = \frac{p}{10} =$	

([1]) Nom, espèce et rang du bâtiment.

CARÈNES FICTIVES ($\lambda = 1$, $h = 1$). TABLEAU II.

Relevé des ordonnées des lignes d'eau (on aura soin, avant d'effectuer le relevé des ordonnées, de corriger convenablement les fonds des couples et les aboutissements des lignes d'eau).

Calcul des demi-aires des lignes d'eau.

Calcul, pour la carène fictive limitée à la flottaison n° 11, des demi-aires des couples et du ½ moment de la carène par rapport à la ligne d'eau zéro.

NUMÉROS des couples.	NUMÉROS DES LIGNES D'EAU.												DEMI-AIRES des couples correspondant à ligne d'eau n° 11.
	½ 11.	10.	9.	8.	7.	6.	5.	4.	3.	2.	1.	½ 0.	
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
AV 10	¼	½	½	½	½	½	½	½	½	½	½	¼	
9	½											½	
8	½											½	
7	½											½	
6	½											½	
5	½											½	
4	½											½	
3	½											½	
2	½											½	
1	½											½	
0	½											½	
AR 1	½											½	
2	½											½	
3	½											½	
4	½											½	
5	½											½	
6	½											½	
7	½											½	
8	½											½	
9	½											½	
10	¼	½	½	½	½	½	½	½	½	½	½	¼	
½ aires des lignes d'eau.	$\frac{1}{2}\Sigma_{11}$	Σ_{10}	Σ_9	Σ_8	Σ_7	Σ_6	Σ_5	Σ_4	Σ_3	Σ_2	Σ_1	$\frac{1}{2}\Sigma_0$	V_{11}
Facteurs.	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	
½ moments des lignes d'eau par rapport à la ligne zéro.													m_{11}

CARÈNES FICTIVE

Calcul des aires de

Calcul des abscisses et de

NUMÉROS des couples et facteurs. 1	LIGNE D'EAU N° 11. DEMI-AIRES des couples. 2	LIGNE D'EAU N° 11. PRODUITS. 3	TRANCHE N° 11 ou demi-somme des ordonnées des lignes d'eau n°s 11 et 10. 4	LIGNE D'EAU N° 10. DEMI-AIRES des couples. 5	LIGNE D'EAU N° 10. PRODUITS. 6	TRANCHE N° 10 ou demi-somme des ordonnées des lignes d'eau n°s 10 et 9. 7	LIGNE D'EAU N° 9. DEMI AIRES des couples. 8	LIGNE D'EAU N° 9. PRODUITS 9	TRANCHE N° 9 ou demi-somme des ordonnées des lignes d'eau 10
AV 10	$\frac{1}{2}$			$\frac{1}{2}$			$\frac{1}{2}$		
9									
8									
7									
6									
5									
4									
3									
2									
1									
0		M'_{11}			M'_{10}			M'_{9}	
AR 1									
2									
3									
4									
5									
6									
7									
8									
9									
10	$\frac{1}{2}$			$\frac{1}{2}$			$\frac{1}{2}$		
	V_{11}	M''_{11}	T_{11}	V_{10}	M''_{10}	T_{10}	V_{9}	M''_{9}	T_{9}
Abscisse du centre de carène par rapport à la perpendiculaire milieu.	$M_{11} = M'_{11} - M''_{11} =$ $\xi_{11} = \frac{M_{11}}{V_{11}} =$			$M_{10} = M'_{10} - M''_{10} =$ $\xi_{10} = \frac{M_{10}}{V_{10}} =$			$M_{9} = M'_{9} - M''_{9} =$ $\xi_{9} = \frac{M_{9}}{V_{9}} =$		
Ordonnée du centre de carène par rapport à la ligne d'eau zéro.	$m_{11} =$ $\zeta_{11} = \frac{m_{11}}{V_{11}} =$			$m_{11} =$ $\frac{1}{2}\Sigma_{11} + 10\,T_{11} =$ $m_{10} = m_{11} - (\frac{1}{2}\Sigma_{11} + 10\,T_{11}) =$ $\zeta_{10} = \frac{m_{10}}{V_{10}} =$			$m_{10} =$ $\frac{1}{2}\Sigma_{10} + 9\,T_{10} =$ $m_{9} = m_{10} - (\frac{1}{2}\Sigma_{10} + 9\,T_{10}) =$ $\zeta_{9} = \frac{m_{9}}{V_{9}} =$		

…$= 1$, $h = 1$). TABLEAU III.

…uples et des volumes de carène.

…données des centres de carène.

…IGNE D'EAU N° 6. Demi-aires des couples	PRODUITS.	TRANCHE N° 6 ou demi-somme des ordonnées des lignes d'eau n° 6 et 5.	DEMI-AIRES DES COUPLES. LIGNE D'EAU n° 5.	LIGNE D'EAU n° 4.	LIGNE D'EAU n° 3.	LIGNE D'EAU n° 2.	LIGNE D'EAU n° 1.	NUMÉROS des couples.
17	18	19	20	21	22	23	24	25
			½	½	½	½	½	10 AV
								9
								8
								7
								6
								5
								4
								3
								2
								1
	M'_6							0
								1 AR
								2
								3
								4
								5
								6
								7
								8
								9
			½	½	½	½	½	10
V_6	M''_6	T_6	V_5	V_4	V_3	V_2	V_1	

$M_6 = M'_6 - M''_6 =$

$\xi_6 = \frac{M_6}{V_6} =$

$m_7 =$

$\frac{1}{2}\Sigma_7 + 6T_7 =$

…$= m_7 - (\frac{1}{2}\Sigma_7 + 6T_7) =$

$\zeta_6 = \frac{m_6}{V_6} =$

Les aires Σ_{11}, Σ_{10}, Σ_9, ... sont celles des demi-lignes d'eau que donne le Tableau II. T_{11}, T_{10}, T_9, ... sont les demi-volumes des tranches comprises entre deux lignes d'eau successives.

La valeur de m_{11}, qui sert de point de départ au calcul des divers moments m_{10}, m_9, ..., est donnée dans le Tableau II.

Les chiffres de la colonne 5 sont les différences entre ceux des colonnes 2 et 4, ceux de la colonne 8 sont les différences entre ceux des colonnes 5 et 7, et ainsi de suite pour les colonnes 11, 14, ...

CARÈNES FICTIV

Calcul de l'abscisse des aires des lignes d'e

Calcul des hauteurs métacentriq

NUMÉROS des couples et facteurs.	LIGNE D'EAU N° 11.				LIGNE D'EAU N° 10.			
	ORDONNÉES de la ligne d'eau.	PRODUIT DES ORDONNÉES par les facteurs.	PRODUIT DES ORDONNÉES par les carrés des facteurs.	CUBES des ordonnées.	ORDONNÉES de la ligne d'eau.	PRODUIT DES ORDONNÉES par les facteurs.	PRODUIT DES ORDONNÉES par les carrés des facteurs.	CUBES des ordonn
1	2	3	4	5	6	7	8	9
AV 10		$\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$
9								
8								
7								
6								
5								
4								
3								
2								
1								
		D'_{11}				D'_{10}		
0								
AR 1								
2								
3								
4								
5								
6								
7								
8								
9								
10		$\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$
		D''_{11}				D''_{10}		
Sommes et différences.	$D_{11} = D'_{11} - D''_{11}$		Q_{11}	C_{11}	$D_{10} = D'_{10} - D''_{10}$		Q_{10}	C_{10}
Abscisses des aires des lignes d'eau.	$\Gamma_{11} = \frac{D_{11}}{\Sigma_{11}}$				$\Gamma_{10} = \frac{D_{10}}{\Sigma_{10}}$			
Hauteurs métacentriques latitudinales.	$r_{11} = \frac{1}{3}\frac{C_{11}}{V_{11}}$				$r_{10} = \frac{1}{3}\frac{C_{10}}{V_{10}}$			
Hauteurs métacentriques longitudinales.	$R_{11} = \frac{Q_{11} - \Sigma_{11}\Gamma_{11}^2}{V_{11}}$				$R_{10} = \frac{Q_{10} - \Sigma_{10}\Gamma_{10}^2}{V_{10}}$			

Pour la ligne d'eau n° 11, les nombres de la colonne 4 sont le produit des colonnes 1 et 3;
aires Σ dans le Tableau II.

ι = 1, $h = 1$). **TABLEAU IV.**

...r rapport à la perpendiculaire milieu.

...itudinales et longitudinales.

...(nnées) de la (lign)e d'eau.	LIGNE D'EAU N° 7. Produit des ordonnées par les facteurs.	Produit des ordonnées par les carrés des facteurs.	Cubes des ordonnées.	LIGNE D'EAU N° 6. Ordonnées de la ligne d'eau.	Produit des ordonnées par les facteurs.	Produit des ordonnées par les carrés des facteurs.	Cubes des ordonnées.	Numéros des couples et facteurs.
18	19	20	21	22	23	24	25	26
	$\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$	10 (AV)
								9
								8
								7
								6
								5
								4
								3
								2
								1
	D'_7				D'_6			
								0
								1 (AR)
								2
								3
								4
								5
								6
								7
								8
								9
	$\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$	10
	D''_7				D''_6			
$D_7 = D'_7 - D''_7$		Q_7	C_7	$D_6 = D'_6 - D''_6$		Q_6	C_6	
$\Gamma_7 = \frac{D_7}{\Sigma_7} =$				$\Gamma_6 = \frac{D_6}{\Sigma_6} =$				
$r_7 = \frac{1}{3}\frac{C_7}{V_7} =$				$r_6 = \frac{1}{3}\frac{C_6}{V_6} =$				
$R_7 = \frac{Q_7 - \Sigma_7\Gamma_7^2}{V_7} =$				$R_6 = \frac{Q_6 - \Sigma_6\Gamma_6^2}{V_6} =$				

...e pour les autres lignes d'eau. Les volumes V sont donnés dans le Tableau III et les

Tableau V. — Carènes réelles, sans appendices.

Ensemble des calculs relatifs aux carènes réelles, sans appendices, limitées par les différentes lignes d'eau.

Facteurs par lesquels il faut multiplier les résultats relatifs aux carènes fictives ($\lambda = 1$, $h = 1$), pour obtenir ceux du Tableau V.

Numéros des lignes d'eau.	Profondeurs de carène.	Tirants d'eau milieux sous fausse quille.	Volumes de carène V.	Surfaces des lignes d'eau.	Déplacements : de la carène V × 1,026.	Déplacements : moyens par centimètre de chaque tranche.	Déplacements : par centimètre d'immersion à la surface de chaque ligne d'eau.	Distances du centre de gravité des lignes d'eau en avant du milieu.	Distances du centre de carène : à la ligne d'eau zéro.	Distances du centre de carène : en avant du milieu.	Hauteurs métacentriques : latitudinale r.	Hauteurs métacentriques : longitudinale R.	Aires du couple milieu aux diverses lignes d'eau.	Aires des couples pour la flottaison en charge (ligne d'eau n° 10) : Numéros des couples.	Couples avant.	Couples arrière.
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
			$2\lambda h =$	$2\lambda =$				$\lambda =$	$h =$	$\lambda =$	$\frac{1}{h} =$	$\frac{\lambda^2}{h} =$	$2h =$		$2h =$	$2h =$
11																
10														10		
9														9		
8														8		
7														7		
6														6		
5														5		
4														4		
3														3		
2														2		
1														1		
0														0		

***Résultats particuliers à la carène, sans appendices, limitée par la flottaison en charge** (ligne d'eau n° 10).*

Rapport du volume de la carène à celui du parallélépipède circonscrit, $\frac{V}{Llp}$ ....

Rapport du volume de la carène à celui du cylindre circonscrit au couple milieu, $\frac{V}{B_1^2 L}$ ....

Rapport de la surface de la flottaison à celle du rectangle circonscrit, $\frac{\Sigma}{l'L'}$ ....

Rapport de la surface du couple milieu à celle du rectangle circonscrit, $\frac{B_1^2}{lp}$ ....

CALCUL DES APPENDICES.

TABLEAU VI.

DÉSIGNATION DES APPENDICES.	VOLUMES.	DÉPLACEMENTS.	DISTANCES du centre de gravité à la ligne d'eau zéro.	DISTANCES du centre de gravité en avant du milieu.	MOMENTS par rapport à la ligne d'eau zéro.	MOMENTS par rapport à la perpendiculaire milieu.
1	2	3	4	5	6	7
Quille et fausse-quille centrale....						
Quilles latérales................						
Hélices..........................						
Pour les bâtiments à deux hélices. — Tubes ou arbres d'hélices.........						
Pour les bâtiments à deux hélices. — Supports d'hélices.						
Gouvernail, partie située sur l'arrière de l'axe..................						

OBSERVATIONS.

Quilles et fausses-quilles. — Les volumes des quilles et fausses-quilles seront attribués à la première tranche.

Hélices et accessoires. — Pour les bâtiments à deux hélices, les volumes des hélices et de leurs accessoires seront supposés concentrés sur les axes des propulseurs et s'ajouteront à la tranche de la carène qui comprend ces axes.

Pour les bâtiments à une seule hélice, on admettra, comme une approximation suffisante dans la pratique, que le vide de la cage d'hélice est compensé par le volume de l'hélice; on supposera par suite la cage pleine et l'on ne tiendra pas compte de l'hélice.

Gouvernail. — Le volume du ou des gouvernails sera supposé concentré en leur centre de figure, et on l'ajoutera à la tranche de la carène qui comprend ce dernier point.

CARÈNES RÉELLES, AVEC APPENDICES. TABLEAU VII.

Ensemble des résultats des calculs relatifs aux carènes réelles, avec appendices, limitées par les différentes lignes d'eau.

NUMÉROS des lignes d'eau.	PROFONDEURS de carène.	TIRANTS D'EAU MILIEUX sous fausse-quille.	VOLUMES de carène V.	SURFACES des lignes d'eau.	DÉPLACEMENTS de la carène V×1,026.	DÉPLACEMENTS moyens par centimètre de chaque tranche.	DÉPLACEMENTS par centimètre d'immersion à la surface de chaque ligne d'eau.	DISTANCES du centre de gravité des lignes d'eau en avant du milieu.	DISTANCES du centre de carène à la ligne d'eau zéro.	DISTANCES du centre de carène en avant du milieu.	HAUTEURS métacentriques latitudinales r.	HAUTEURS métacentriques longitudinales R.	AIRES DU COUPLE MILIEU aux diverses lignes d'eau (¹).	AIRES DES COUPLES pour la flottaison en charge (ligne d'eau n° 10). Numéros des couples.	AIRES DES COUPLES ... Couples avant (¹).	AIRES DES COUPLES ... Couples arrière (¹).
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
11																
10														10		
9														9		
8														8		
7														7		
6														6		
5														5		
4														4		
3														3		
2														2		
1														1		
0														0		

(¹) Les aires des couples de ce Tableau s'obtiennent en ajoutant à celles du Tableau V les sections transversales des quilles et des fausses-quilles.

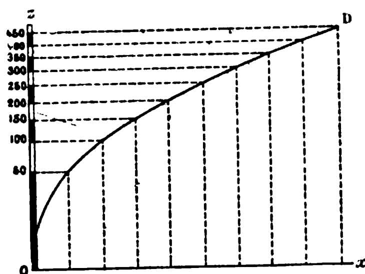
47. Achèvement du plan de formes. Légendes, Tableau des calculs et courbes d'interpolation.

Pour les courbes représentatives des résultats fournis par le Tableau VII, on prend pour axe, sur le longitudinal du plan de formes, la perpendiculaire milieu; puis, avec les hauteurs des lignes d'eau comme ordonnées et les résultats des calculs comme abscisses, on trace les courbes suivantes (voir *Pl. I, fig.* 1):

1° Courbe V ou des volumes en mètres cubes, donnant, pour chaque ligne d'eau, le volume V *complet* de la carène correspondante.

2° Courbe D ou des déplacements en tonneaux de 1000^{kg}, donnant, pour chaque ligne d'eau, le poids D du liquide déplacé. Elle se déduit de la précédente en prenant, comme nous l'avons dit, 1,026 pour poids spécifique moyen de l'eau de mer. Les courbes D et V sont quelquefois appelées *échelles* (D échelle de déplacement, V échelle de solidité), parce qu'autrefois on les transformait en véritables échelles graduées, à divisions inégales, obtenues de la façon suivante : la courbe D, par exemple, étant tracée, on divise en parties égales l'axe des déplacements Ox (chaque division représentant, par exemple, 50 tonneaux), puis on élève, par les points de division obtenus (*fig.* 67), des perpendiculaires jusqu'à la courbe, ce qui donne d'autres points que l'on ramène sur l'axe Oz par des horizontales. L'axe Oz se trouve alors transformé en échelle inégalement graduée, indiquant des profondeurs de carènes variant de 50 en 50 tonneaux.

Fig. 67.



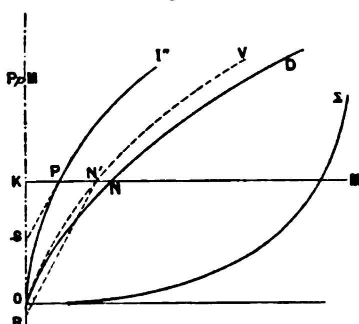
3° Courbe ζ ou des hauteurs des centres de carène au-dessus de la flottaison zéro.

4° Courbe ξ ou des abscisses des centres de carène en avant de la perpendiculaire milieu. Les ξ négatifs sont portés en arrière de cette perpendiculaire.

5° Courbe Σ ou des aires des lignes d'eau. On remarquera,

comme nous l'avons déjà dit, la différence, à la partie inférieure, entre la courbe exacte des aires des lignes d'eau et celle que fournit le Tableau VII après correction des aboutissements des couples. La courbe de déplacement étant l'intégrale du premier ordre de cette courbe, les coefficients angulaires de V et D (*fig.* 68) sont proportionnels aux ordonnées correspondantes de Σ. De plus, le centre de gravité de la portion de la courbe Σ, limitée à une flottaison quelconque KM, est à la même hauteur que le centre de la carène V_k. Si donc on prend l'intégrale seconde de Σ, c'est-à-dire l'intégrale première de V ou D, et si, à l'intersection P de la flottaison et de cette courbe I″, on mène une tangente à I″, cette tangente coupera l'axe vertical OK en un point S ayant précisément pour ordonnée ζ_k. Comme il est souvent difficile de mener avec précision une tangente à une courbe graphique, on prendra KR = échelle a de la courbe intégrale I″; on joindra N′R et l'on mènera PS parallèle à N′R. (*Voir* n° 30, *Propriétés des courbes intégrales.*)

Fig. 68.



6° Courbe Γ ou des abscisses des centres de gravité des lignes d'eau en avant de la perpendiculaire milieu. Les Γ négatifs se portent en arrière de cette perpendiculaire. En prenant l'échelle du plan pour mesurer les Γ, la courbe donne les centres de gravité en position exacte.

7° Courbe r ou des petits rayons métacentriques initiaux, donnant, pour chaque flottaison droite, la hauteur du métacentre latitudinal initial.

8° Courbe R ou des grands rayons métacentriques initiaux, donnant, pour chaque flottaison droite, la hauteur du métacentre longitudinal initial.

9° Courbe A ou courbe des aires du couple milieu limitées aux diverses lignes d'eau. C'est la courbe intégrale du premier ordre du contour du couple milieu.

10° Courbe S ou courbe des aires des divers couples limités à une certaine flottaison droite. Cette courbe, relative à une seule

carène (généralement, celle limitée par la flottaison en charge n° 10), se trace sur le longitudinal, en prenant pour axe XX la trace de la flottaison 0 ou de la flottaison 10, ou encore sur la projection horizontale, en prenant pour XX l'axe même de cette projection. Son aire donne le volume V_{10}. Son intégrale du premier ordre donnerait le volume des tranches verticales de la carène 10. Le centre de gravité de la courbe S donne la position en longueur du centre de la carène V_{10} (voir *Pl. II, fig.* 5).

Les échelles auxquelles ces courbes sont tracées ne sont pas indifférentes. Pour ζ, ξ, Γ, r, il est bon de prendre l'échelle même du plan des formes; pour R, d'adopter une échelle différente, simplement déterminée par la condition de ne pas sortir des limites de l'épure; enfin, pour V, D, Σ, A, S, d'employer une échelle aussi grande que possible pour augmenter la précision de la lecture.

Au lieu de tracer les courbes ζ et ξ, on peut tracer une seule courbe des centres de carène en véritable position dans le plan longitudinal, avec ξ pour abscisse et ζ pour ordonnée; mais il faut alors bien établir la correspondance entre les points obtenus (centres des carènes V_k) avec les flottaisons k correspondantes, au moyen, par exemple, de rayons vecteurs (*fig.* 69).

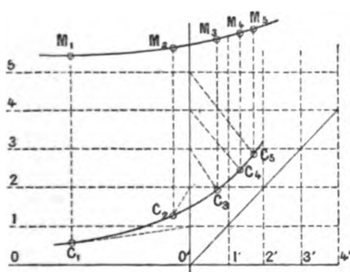


Fig. 69.

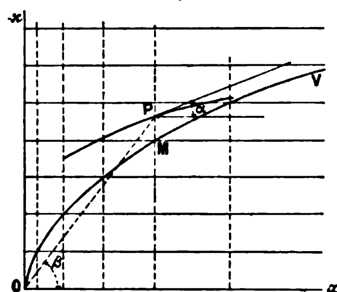


Fig. 70.

En portant alors sur les verticales des centres de carène les petites hauteurs métacentriques initiales r, on obtiendra également en véritable position les petits métacentres initiaux.

On pourra faire la même construction pour les grands rayons métacentriques, mais avec une échelle plus petite que celle du plan pour les longueurs R.

En Angleterre, on emploie, pour figurer les centres des carènes droites, deux courbes, ζ et ξ; seulement, au lieu de porter les ζ

comme les ξ en abscisses sur les flottaisons correspondantes, on les porte en ordonnées à partir de la flottaison o, et sur des verticales 1′, 2′, 3′, 4′, 5′, ..., que l'on obtient en menant par O une droite inclinée à 45° sur les lignes d'eau, et en ramenant par des verticales ses intersections avec les différentes lignes d'eau (*fig.* 69).

Dans l'étude de la stabilité transversale, pour des flottaisons droites, il est intéressant de connaître les valeurs du moment d'inertie i_k de chaque flottaison par rapport à son axe longitudinal, et en même temps le volume de carène correspondant V_k. On trace alors la courbe $i = f(V)$ de la façon suivante : aux points où la courbe V coupe les lignes d'eau (*fig.* 70), on élève des perpendiculaires, et l'on porte sur elles les i des carènes droites correspondantes à partir de Ox. On a alors i en ordonnées et V en abscisses ; de plus, on sait que les fonctions $\frac{i}{V}$ et $\frac{di}{dV}$, utiles à considérer en Géométrie, sont alors mesurées par les tangentes des angles β et α (*fig.* 70), puisqu'on a

$$\frac{i}{V} = r = k \operatorname{tang} \beta \qquad \text{et} \qquad \frac{di}{dV} = r = k \operatorname{tang} \alpha.$$

Une fois les tracés dont nous venons de parler effectués sur le plan de formes, on complète ce plan par l'inscription du Tableau VII et par l'inscription des légendes suivantes :

PREMIÈRE LÉGENDE. — *Dimensions principales.*

Distance entre les perpendiculaires [de l'axe du gouvernail à (¹)]	Λ =
Distance de la P*p*Æ à la face Æ de l'étambot *A*.	
Longueur de la carène de la P*pA* à la face Æ de l'étambot *A*	L =
Distance de l'extrémité *A* de la flottaison en charge à la P*pA*	
Distance de l'extrémité Æ de la flottaison en charge à la P*p*Æ	
Longueur de la flottaison en charge	L′ =
Longueur de quille portant sur terre..........	
Longueur totale du bâtiment hors tout (longueur d'encombrement)	L_1 =

(¹) Indiquer la position de la P*pA*.

Largeur extérieure maxima à la flottaison en charge.................................. $l' =$
Largeur extérieure de la carène au fort situé à au-dessus (ou au-dessous) de la flottaison en charge.................................. $l =$
Largeur en dehors des tambours, réduits, tourelles, etc..................................
Profondeur de la carène au milieu............. $p =$
Creux sur fond de carène [1] à la ligne droite des baux du pont supérieur : { P*p*Æ......... / P*p*M.......... / P*p*Ⱥ..........
Dimensions à ajouter au creux, mesuré intérieurement au milieu [2], sur carlingue, etc., pour obtenir le creux sur fond de carène..........
Tableau de la quille........................ $q =$
Épaisseur de la fausse-quille...................
Hauteur du seuillet de sabord (arête extérieure) au-dessus de la ligne droite des baux du pont supérieur..................................
Épaisseur des bordages du pont supérieur.....
Tirants d'eau sous fausse-quille : { Arrière.................. / Avant.................. / Milieu.................. / Différence................
Hauteur de batterie au milieu.................
Distance de la pointe de l'éperon au-dessous de la flottaison 10...........................
Hauteur de l'axe de l'arbre des .... [3] au-dessus du fond de carène : { entre les manivelles..... / à la face Æ de l'étambot Ⱥ.
Distance de l'axe des roues à la P*p*M (+ sur l'avant)..................................
Distance du plan moyen des hélices à la P*p*Æ..
Distance au plan diamétral des axes des arbres des hélices.. ....
Diamètre extérieur des hélices (ou des roues)..

Deuxième légende. — *Déplacement* (*carène* 10).

Volume de la carène en mètres cubes, appendices non compris......................... V =

---

[1] Prolongé, au besoin, jusqu'aux extrémités.
[2] Selon le cas.
[3] Hélices, roues, etc.

Déplacement de la carène en mètres cubes, appendices non compris		$D =$
Déplacement des appendices		
Déplacement total		$P =$
Surface immergée du couple mileu :	quille et fausse-quille non comprises	$B_1^2 =$
	quille et fausse-quille comprises	$B^2 =$
Surface de la flottaison en charge		$\Sigma =$
Volume du parallélépipède circonscrit à la carène		$Llp =$
Volume du cylindre circonscrit au couple milieu		$B_1^2 L =$
Surface du rectangle circonscrit à la flottaison		$l'L' =$
Surface du rectangle circonscrit au couple milieu		$lp =$
Rapports en nombres abstraits	du volume de la carène à celui du parallélépipède circonscrit	$\frac{V}{Llp} =$
	du volume de la carène à celui du cylindre circonscrit au couple milieu	$\frac{V}{B_1^2 L} =$
	de la surface de la flottaison à celle du rectangle circonscrit	$\frac{\Sigma}{l'L'} =$
	de la surface du couple milieu à celle du rectangle circonscrit	$\frac{B_1^2}{lp} =$
Déplacement, pour 1cm d'immersion, à la flottaison en charge		

Troisième légende. — *Stabilité* (*carène* 10).

(L'explication de cette légende ressortira des études ultérieures.)

Distance du centre de carène, appendices compris :	à la ligne d'eau zéro	
	à la flottaison en charge	
	à la PpM (+ en avant)	
Distance du centre de gravité de la flottaison à la PpM		
Hauteur du centre de gravité du bâtiment en charge au-dessus du centre de carène		$a =$
Hauteur du petit métacentre initial au-dessus du centre de carène		$r =$
Hauteur du petit métacentre initial au-dessus du centre de gravité		$r - a =$
Hauteur du grand métacentre initial au-dessus du centre de carène		$R =$

Hauteur du grand métacentre initial au-dessus du centre de gravité .... $R - a =$

Moment nécessaire pour faire varier de 1^{cm} la différence de tirant d'eau .... $\frac{P(R-a)}{100\,A} =$

Moment nécessaire pour produire une bande de 1° .... $0{,}01745\,P(r - a) =$

48. Formules approximatives de M. Normand pour les carènes droites.

Pour la confection d'un avant-projet de coque répondant à des conditions imposées, il est nécessaire de pouvoir se rendre compte rapidement et en gros de la stabilité d'un navire par ses dimensions principales, sans recourir au tracé de lignes d'eau plus ou moins nombreuses. Ce n'est qu'une fois les dimensions principales arrêtées, et pour le projet proprement dit, qu'on étudie en effet les détails du plan des formes.

M. J.-A. Normand [1] donne les formules suivantes comme résultant d'une longue pratique et représentant avec une exactitude assez grande les éléments cherchés :

1° $$B^2 = 1{,}15\,\frac{Vl}{\Sigma};$$

B^2 est ici l'aire du couple milieu, V le volume total de la carène droite, l la largeur à la flottaison au milieu, Σ l'aire de la flottaison.

2° $$Z_0 = \frac{1}{3}\left(\frac{p}{2} + \frac{V}{\Sigma}\right);$$

Z_0 est la distance à la flottaison du centre de la carène droite, p la profondeur de carène sur la perpendiculaire milieu.

3° $$X_0 = 0{,}45\,\frac{V_{A\!\!/} - V_{R\!\!/}}{B^2};$$

X_0 est la distance, en avant du couple milieu, du centre de la carène droite; $V_{A\!\!/}$ le volume de la partie avant de la carène; $V_{R\!\!/}$ celui de la partie arrière.

4° $$r_0 = \left[0{,}008 + 0{,}0745\left(\frac{\Sigma}{Ll}\right)^2\right] l^3 L;$$

[1] J.-A. NORMAND, *Formules approximatives de construction navale*. Paris, Arthus Bertrand; 1870.

r_0 est le petit rayon métacentrique initial ou rayon de courbure de la courbe transversale des centres de carène isocarènes en C_0, centre de la carène droite; L est la longueur à la flottaison.

5°
$$R_0 = \left[0{,}008 + 0{,}077\left(\frac{\Sigma}{Ll}\right)^2\right]\frac{L^2 l}{V};$$

R_0 est le grand rayon métacentrique initial ou rayon de courbure à l'origine de la courbe longitudinale des centres de carène isocarènes.

6°
$$S = \Lambda\left[1{,}5p + \left(0{,}09 + \frac{V}{\Lambda l p}\right)l\right];$$

S est la surface de la carène et Λ la longueur totale de cette carène.

49. Formules approximatives de M. Albaret pour les carènes droites.

M. Albaret, ingénieur de la Marine, indique les formules approximatives suivantes pour calculer rapidement la hauteur du centre de la carène droite et celle du métacentre latitudinal initial.

Ces formules sont :

1°
$$\zeta_0 = p\left(0{,}080 - 0{,}24\frac{B^2}{lp}\right), \qquad \text{si} \quad \frac{B^2}{lp} < 0{,}85$$

ou

$$\zeta_0 = p\left(1{,}10 - 0{,}60\frac{B^2}{lp}\right), \qquad \text{si} \quad \frac{B^2}{lp} > 0{,}85;$$

ici ζ_0 est la hauteur, au-dessus du fond de carène, du centre de la carène droite.

2°
$$r_0 = 0{,}076\frac{B^2}{l^2}.$$

Les lettres de ces formules, autres que ζ_0, ont les mêmes significations que dans les formules de M. Normand (n° 48).



CHAPITRE VI.

APPLICATION AU NAVIRE DES MÉTHODES DE CALCUL POUR LES CARÈNES INCLINÉES.

INTERPOLATION GRAPHIQUE DES FONCTIONS TABULAIRES A DEUX VARIABLES.

50. Choix des variables indépendantes à employer pour les carènes inclinées.

Quand la flottaison du navire n'est plus la flottaison en charge du plan de formes ni parallèle à cette flottaison en charge, on dit que cette flottaison limite une carène inclinée. Cette inclinaison de la flottaison réelle sur la flottaison en charge, ou mieux de la normale à la flottaison réelle sur la perpendiculaire milieu, peut se faire dans un plan azimutal quelconque. Or nous verrons plus tard, en Géométrie, qu'il suffit de considérer les inclinaisons dans les deux azimuts principaux, qui sont le plan longitudinal et le plan transversal. Dans le premier cas, le plan des mâts reste vertical; dans le second, il fait un angle plus ou moins prononcé avec le plan vertical longitudinal primitif.

Or, quel que soit celui des deux azimuts principaux d'inclinaison que l'on suppose connu, on peut définir la position exacte de la flottaison inclinée au moyen des deux variables indépendantes ci-après :

1° p, profondeur de carène, mesurée sur la perpendiculaire milieu du plan de formes;

2° θ, angle de la flottaison inclinée avec la flottaison en charge normale. Cet angle θ sera mesuré dans le plan longitudinal pour les inclinaisons longitudinales (*fig.* 71), et dans le plan transversal pour les inclinaisons transversales.

Les quantités dépendant de la position de la flottaison réelle (c'est-à-dire fonctions de p et de θ), dont certaines valeurs parti-

culières sont fournies par les calculs que nous indiquerons bientôt, sont les suivantes :

V, volume de carène en mètres cubes;
D, déplacement de la carène en tonneaux;
T, tirant d'eau maximum ou distance à la flottaison réelle du point le plus bas de la quille;
X, Y, Z, coordonnées du centre de carène par rapport aux axes du plan de formes;
r et R, rayons métacentriques; coordonnées de la projection du centre de carène sur la flottaison réelle inclinée;
i et I, moments d'inertie principaux de la flottaison réelle;
Σ, surface de la flottaison réelle;
....

La forme analytique de ces fonctions ne serait connue que si la surface de la carène était elle-même une surface analytique; comme c'est, au contraire, une surface topographique ou tabu-

Fig. 71.

laire, on ne pourra faire autre chose que de calculer, pour une série de systèmes de valeurs $\left\{\begin{matrix} p_1, \\ \theta_1, \end{matrix}\right. \left\{\begin{matrix} p_2, \\ \theta_2, \end{matrix}\right. \left\{\begin{matrix} p_3, \\ \theta_3, \end{matrix}\right. \ldots$ des variables indépendantes, un certain nombre de valeurs des fonctions. Les systèmes de valeurs des variables indépendantes sont arbitraires; toutefois, on a soin de choisir ceux qui fournissent, sur le plan de coordonnées $Op\theta$ des variables, les sommets d'un quadrillage plus ou moins serré.

51. Méthode d'interpolation de Reech.

L'interpolation graphique a pour but, étant donné un Tableau de valeurs d'une fonction de p et de θ correspondant à certains systèmes de valeurs des variables, de trouver la valeur de cette fonction pour un système quelconque p', θ' des variables.

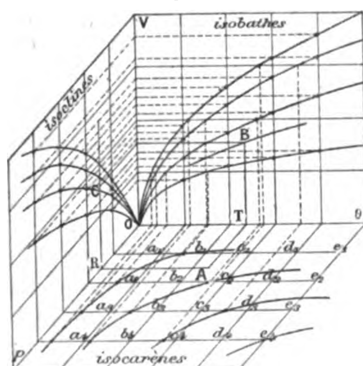
Le procédé que nous allons exposer a été proposé, dès 1863,

par Reech, ingénieur de la Marine, alors directeur de l'École d'application du Génie maritime. Il a été ensuite appliqué par M. Risbec, ingénieur de la Marine, dans l'étude pratique de la stabilité pour les inclinaisons transversales.

Prenons une quelconque des fonctions précitées, V par exemple (*fig.* 72).

La précaution que nous avons prise, de calculer les valeurs de V pour une série de systèmes de valeurs des variables formant

Fig. 72.



quadrillage sur le plan des $p\theta$, va nous permettre de représenter cette fonction graphiquement, comme une surface topographique, par des réseaux de sections parallèles à trois plans orthogonaux et projetées en vraie grandeur sur chacun des plans coordonnés. C'est ainsi qu'en groupant les points de la surface V qui ont les pieds de leurs ordonnées sur une droite parallèle à Op (c_1, c_2, c_3, ..., c_5 par exemple), on pourra considérer chaque groupe comme appartenant à la section de la surface V par un plan $\theta = \text{const.} = \theta_n$, c'est-à-dire que les points en question, projetés sur le plan VOp et réunis par une courbe, donneront la courbe de niveau correspondant à l'inclinaison constante $\theta = \theta_n$, ou, comme on dit, l'*isocline* θ_n du volume V, suivant une expression introduite dans la théorie du navire par M. Daymard.

Ce groupement des points de la surface V revient donc à répartir leurs projections sur le plan VOp en un certain faisceau de courbes, qui sont les isoclines de la fonction V.

Si maintenant on groupe les points qui ont les pieds de leurs ordonnées sur une droite parallèle à $O\theta$ (a_2, b_2, c_2, d_2, e_2, ...

par exemple), on pourra considérer chaque groupe comme appartenant à la section de la surface V par un plan $p = \text{const.} = p_m$, c'est-à-dire que les points en question, projetés sur le plan $VO\theta$ et réunis par une courbe, donneront la courbe de niveau correspondant à la profondeur de carène constante $p = p_m$, ou, comme nous proposons de la dénommer, l'*isobathe* (¹) p_m du volume V. Le nouveau groupement des points de la surface V est donc revenu à répartir leurs projections sur le nouveau plan $VO\theta$ en un nouveau faisceau de courbes, qui sont les isobathes de la fonction V.

Chacun des deux faisceaux, isoclines ou isobathes, définit également bien la surface V; mais l'un, celui des isoclines, permet d'interpoler, par rapport à p, pour chaque valeur de θ correspondant à une courbe du faisceau; l'autre, celui des isobathes, permet d'interpoler, par rapport à θ, pour chaque valeur de p correspondant à une courbe de ce faisceau.

Il est dès lors possible, en combinant les deux graphiques, de trouver la valeur de la fonction, pour un système quelconque, $p'\theta'$, des variables indépendantes, correspondant, par exemple, au point A sur le plan des $pO\theta$.

Menons le plan ARC ($p = p'$), les intersections de ce plan avec les isoclines seront données en hauteur sur VOp, et en distance à l'axe Op sur $VO\theta$; en sorte qu'on pourra tracer sur $VO\theta$ l'isobathe $p = p'$, dont l'intersection avec l'ordonnée TB, $\theta = \theta'$, fournira les projections B et C du point M(A, B, C), c'est-à-dire la valeur cherchée TB de la fonction V pour le système $p'\theta'$ des variables indépendantes.

Les deux réseaux des isoclines et des isobathes permettent de tracer un troisième réseau de courbes parallèles au troisième plan de projection. Chacune des courbes de niveau de ce troisième réseau, se projetant en vraie grandeur sur ce troisième plan et suivant des droites sur les deux autres, correspondra à un volume de carène constant, $V = \text{const.} = V_l$; ce sera une *isocarène,* suivant la dénomination introduite par Ch. Dupin au commencement du siècle.

On peut encore désigner les trois réseaux dont il a été parlé par les noms suivants : réseau des *pantocarènes pantobathes iso-*

(¹) Des deux mots grecs : ἴσος, égal, et βαθὺς, profond.

clines, sur le plan de projection $\mathrm{VO}p$; réseau des *pantocarènes pantoclines isobathes,* sur $\mathrm{VO}\theta$, et réseau des *isocarènes pantoclines pantobathes,* sur $p\mathrm{O}\theta$.

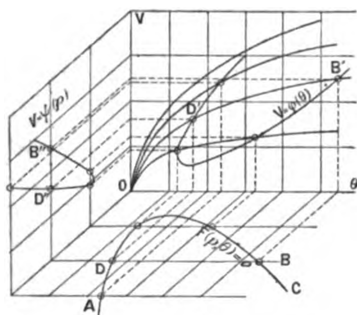
On fera un graphique semblable pour l'interpolation de chacune des autres fonctions de p et de θ.

52. Cas où il existe une relation entre les variables indépendantes.

Si, par suite d'une considération quelconque, on établit une relation entre les deux variables indépendantes, il suffira ensuite de se donner une seule des variables, p ou θ, pour déterminer la fonction.

Soit, en effet, la relation établie, $\mathrm{F}(p, \theta) = 0$. Elle se traduit, sur le plan $p\mathrm{O}\theta$, par une courbe ABC (*fig.* 73), et les valeurs

Fig. 73.



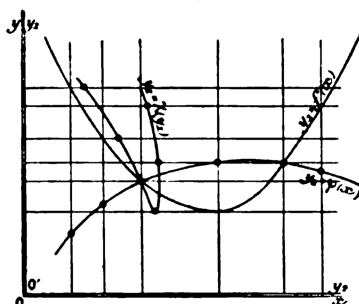
de la fonction, satisfaisant à la fois à l'équation de la surface $\mathrm{V} = f(p, \theta)$ et à la relation $\mathrm{F}(p, \theta) = 0$, se trouvent à l'intersection de la surface V, avec le cylindre de base ABC, et parallèle à OV.

Or, grâce au choix des systèmes de valeurs des variables indépendantes, la surface V a pu être représentée comme surface topographique par les tracés des réseaux de sections, et rien n'est plus simple que de chercher dans chaque section les points d'intersection des génératrices du cylindre avec la section de la surface elle-même. La section DB donne, par exemple, les points d'intersection D′, B′ en projection sur $\mathrm{VO}\theta$, et D″, B″ en projection sur $\mathrm{VO}p$. On peut donc tracer graphiquement soit la courbe $\mathrm{V} = \varphi(\theta)$, soit la courbe $\mathrm{V} = \psi(p)$, qui contiennent toutes les solutions possibles et une seule des variables indépendantes.

53. Élimination graphique d'une variable indépendante entre deux fonctions.

Considérons d'abord le cas simple de deux fonctions d'une seule variable, $y_1 = f(x)$, $y_2 = \varphi(x)$, qui sont données, non par

Fig. 74.



leurs équations, mais par un tracé (*fig.* 74), et entre lesquelles il faut éliminer x pour avoir la relation

$$y_2 = \chi(y_1),$$

ou plutôt la courbe graphique représentant cette relation.

Pour cela, il n'y a qu'à prendre l'axe de coordonnées de la variable à éliminer pour axe des ordonnées de l'une des fonctions y_2 par exemple, en même temps qu'on portera sur l'axe ancien des fonctions, comme abscisses, les valeurs de l'autre fonction y_1; l'abscisse y_1 et l'ordonnée y_2 correspondante n'étant autres, d'ailleurs, que les valeurs des deux fonctions répondant à une même valeur de la variable x à éliminer.

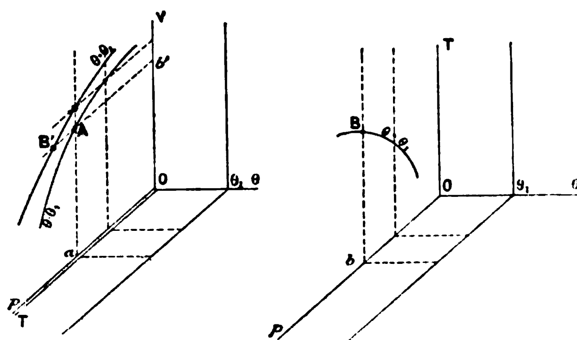
Passons maintenant au cas de deux variables indépendantes. Soient les fonctions $V = f(p, \theta)$ et $T = \varphi(p, \theta)$, données par deux graphiques. On veut éliminer la variable p et obtenir sur un troisième graphique la fonction $T = \psi(V, \theta)$.

Pour cela, les courbes de niveau des deux fonctions étant supposées tracées aux mêmes intervalles $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \ldots$, on considère les courbes de même niveau dans les deux surfaces [$\theta = \theta_1$ par exemple (*fig.* 75)]; puis, sur ces courbes, deux points où l'autre variable indépendante p a la même valeur, a et b. Cela fait, on prend la valeur d'une des fonctions, $\overline{aA}$, pour abscisse dans le

plan $\mathrm{VO}p$, et l'on porte en ordonnée correspondante $\overline{b'\mathrm{B}'}$, parallèlement à l'axe $\mathrm{O}p$ de la variable à éliminer, la valeur $\overline{b\mathrm{B}}$ de l'autre fonction.

En opérant de la même façon pour plusieurs points des deux isoclines, on pourra tracer, sur le plan $\mathrm{VO}p$ qui est devenu le

Fig. 75.



plan VOT, la courbe des points B' qui n'est autre que l'isocline $\theta = \theta_1$ de la fonction cherchée $\mathrm{T} = \psi(\mathrm{V}, \theta)$, et ainsi de suite pour les autres isoclines.

Cette élimination graphique de la variable p se fait très souvent entre la fonction V d'une part et l'une quelconque des autres fonctions de p et de θ ; autrement dit, on change fréquemment de variable indépendante en prenant V au lieu de p, parce que, dans les résultats des calculs d'une carène, c'est l'élément volume qui joue le rôle le plus important, et qu'en particulier il y a le plus grand intérêt à connaître les valeurs des fonctions pour des isocarènes, $\mathrm{V} = \mathrm{const.}$

54. Cas où il existe en outre une relation entre les variables indépendantes.

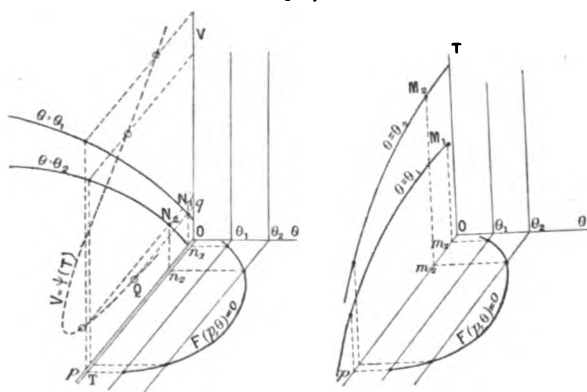
Si les variables indépendantes p et θ doivent satisfaire à une certaine relation $\mathrm{F}(p, \theta) = 0$, il est possible d'éliminer graphiquement à la fois p et θ entre cette relation et les deux fonctions $\mathrm{V} = f(p, \theta)$, $\mathrm{T} = \varphi(p, \theta)$, pour arriver finalement à une équation $\mathrm{V} = \psi(\mathrm{T})$, ou mieux, à une courbe graphique traduisant cette équation.

Soient, en effet, les graphiques V et T représentant les deux fonctions (*fig.* 76).

Traçons, pour chacun de ces graphiques, la courbe $F(p, \theta) = 0$ sur le plan des $p\theta$: ce sera la base d'un cylindre parallèle à OV et à OT.

Ce cylindre coupe les isoclines de la surface T en $M_1, M_2, \ldots,$ et les valeurs de T sont, en ces points, $\overline{m_1 M_1}$, $\overline{m_2 M_2}$, ... Mais ce cylindre coupe les mêmes isoclines de V en $N_1, N_2, \ldots,$ donnant les valeurs correspondantes de V, $\overline{n_1 N_1}$, $\overline{n_2 N_2}$, ... Si, dès

Fig. 76.



lors, par le point N_1 par exemple, on mène l'ordonnée parallèle à Op et qu'on prenne sur cette ligne $\overline{qQ} = \overline{m_1 M_1}$, on aura un point Q ayant pour abscisse et ordonnée deux valeurs correspondantes de V et T. En continuant ainsi et en réunissant les points Q par un trait continu, on obtiendra la courbe cherchée

$$V = \psi(T).$$

On serait d'ailleurs parvenu à la même courbe en considérant les intersections du cylindre $F(p, \theta) = 0$ avec les isobathes des fonctions V et T.

CHAPITRE VII.

APPLICATION AU NAVIRE DES MÉTHODES DE CALCUL POUR LES CARÈNES INCLINÉES.

MÉTHODES EMPLOYANT DES RÉSEAUX DE SECTIONS SPÉCIAUX.

Le moyen le plus simple, pour calculer le déplacement et les hauteurs métacentriques de carènes à flottaisons inclinées sur la flottaison normale, consiste à mener des plans équidistants parallèles à ces flottaisons inclinées et à opérer sur eux comme on l'a fait, dans le cas des carènes droites, sur les lignes d'eau parallèles à la flottaison en charge du plan de formes.

55. Méthodes de M. Benjamin et de M. Spence. — Inclinaisons transversales.

M. Benjamin songea, le premier, à employer, une méthode de calcul basée sur ce principe, et il publia, dans le journal *The Steamship*, une étude qu'on retrouve exposée dans l'Ouvrage de M. Reed sur la stabilité des navires ([1]) et dans laquelle, au moyen de sections parallèles à la flottaison inclinée, il calculait le volume et les coordonnées du centre de volume des carènes limitées par chacune de ces sections. Pour l'inclinaison α, il déterminait un centre de carène quelconque, C_{10} par exemple (*fig.* 77), par sa distance Z à la flottaison inclinée o et par sa distance Y à un plan fixe AB mené par un point connu A perpendiculairement aux flottaisons inclinées. La courbe joignant les centres C_1, C_2, C_3, ..., C_{10} des carènes de même inclinaison α est une courbe pantocarène isocline, et, en face de chaque point obtenu C_n, on

([1]) Sir Edward J. Reed, *The stability of ships*, p. 158 et suiv. (Éditeur Ch. Griffin, Londres; 1885).

peut marquer comme cote le volume V_n de la carène correspondante. Cela fait, si l'on recommence les mêmes opérations et le même tracé pour une série d'inclinaisons $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, on possédera un faisceau de pantocarènes isoclines, le long desquelles le

Fig. 77.

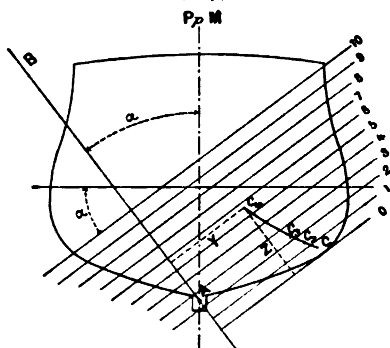
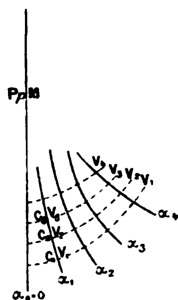


Fig. 78.



volume sera coté, et à travers lequel on pourra tracer des courbes $V_1, V_2, \ldots$ joignant les points de même cote (*fig.* 78). Ce nouveau faisceau ne sera autre que celui des courbes isocarènes pantoclines, dont la recherche est le but même des méthodes de calcul.

On trouvera, dans l'Ouvrage précité de M. Reed, un Tableau de calculs préparé pour l'emploi de cette méthode, qui, cependant, n'entra pas sous cette forme dans la pratique; car son auteur lui-même, reconnaissant, peu de temps après, que le calcul de la coordonnée Z était superflu, la simplifia en la bornant aux calculs des volumes de carène et des seules coordonnées Y de leurs centres.

En effet, puisqu'on connaît l'angle α, la coordonnée Y suffit pour déterminer la position de la droite indéfinie $C\varpi$ (*fig.* 79) suivant laquelle agit la poussée. Or cette position de la droite indéfinie intervient généralement seule dans les problèmes pratiques de stabilité en vue desquels sont effectués les calculs, et ce n'est que dans des cas très spéciaux qu'il pourrait être nécessaire de connaître le point de départ C de cette droite.

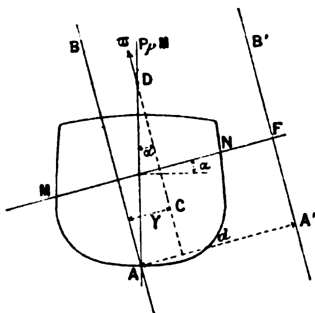
Pour déterminer la position de la droite indéfinie $C\varpi$, on peut aussi et avec plus de commodité, employer, au lieu de Y, la distance $AD = Z'$, mesurée sur la perpendiculaire milieu, et comprise entre le point D, où la poussée rencontre le plan longitudi-

nal, et le point fixe A, où la perpendiculaire milieu rencontre la ligne d'eau zéro du plan des formes. Z′ est lié à Y par la relation

$$Z' = \frac{Y}{\sin\alpha}.$$

Au moment même où M. Benjamin simplifiait sa méthode par la suppression du calcul de Z, M. Spence (1) y apportait de son côté une amélioration notable, en reportant simplement l'axe AB des moments en A′B′, tout à fait en dehors du maître couple (fig. 79). Dans chaque section, inclinée telle que MN, on mesure

Fig. 79.



alors à chaque couple les deux ordonnées de même signe $u = MF$ et $u' = NF$, au lieu de deux ordonnées de signe contraire. Cette petite modification rend les calculs plus clairs et plus faciles à contrôler à un instant quelconque au cours des opérations. La méthode Benjamin, modifiée par Spence, ou, comme nous l'appellerons, *méthode Benjamin-Spence,* a été appliquée en France avec succès dans certains chantiers de l'industrie privée et aussi, récemment, dans la Marine de l'État; nous allons donc entrer dans quelques détails sur la disposition à employer pour ses Tableaux de calculs.

Le relevé des ordonnées se fait de la façon suivante :

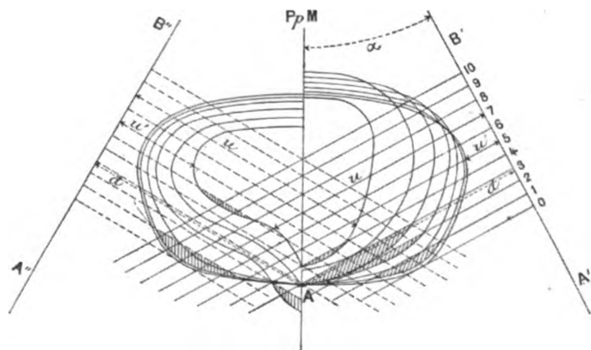
On trace sur une feuille de papier calque une série de 11 lignes équidistantes (0, 1, 2, ..., 10) et un axe A′B′ perpendiculaire à toutes les droites de ce réseau. Cela fait, on pose ce tracé sur le vertical du plan de formes de telle façon que les droites du réseau

(1) *Transactions of the Institution of Naval Architects,* 1884 (à Londres, chez Sotheran); p. 208, Note de M. Benjamin; p. 222, Note de M. Spence.

du calque fassent l'angle donné α avec les lignes d'eau du plan de formes, que l'axe A′B′ soit à une distance connue d du point A du plan de formes (*fig.* 79), et enfin que la ligne d'eau inférieure du réseau du calque soit tangente au contour du maître couple (*fig.* 80).

Comme le vertical ne contient que la moitié du contour de chaque couple, on ne peut obtenir, par l'application indiquée du calque, que l'une des deux ordonnées dont on a besoin (par exemple, u pour les couples Æ et u' pour les couples $\mathcal{N}$). Pour

Fig. 80.



relever les autres (u pour les couples $\mathcal{N}$ et u' pour les couples Æ), il faut retourner le calque dans une position symétrique de la première par rapport à la perpendiculaire milieu et représentée en tirets sur la *fig.* 80.

On ne fait pas d'ordinaire de corrections d'aboutissements ni pour les extrémités des sections inclinées, ni pour les portions des différents couples qui restent comprises entre deux sections obliques (parties hachées sur la *fig.* 80). Il y aurait cependant, pour les volumes, avantage à opérer une correction de ces fonds de couples, d'autant que cette correction n'influerait ensuite que sur la coordonnée Z du centre de carène dont on n'a pas besoin, n'altérant pas sensiblement Y que l'on calcule. Mais les opérations, étendues à plusieurs inclinaisons, deviendraient alors, il est vrai, beaucoup plus longues et pénibles. Quoi qu'il en soit, les calculs à effectuer sur les ordonnées relevées sont les suivants :

Aire A_k de la $k^{\text{ième}}$ section inclinée :

$$A_k = \int_{\mathcal{N}}^{Æ} (u_k - u'_k)\,dx = \lambda \sum_0^{20} (u_k - u'_k),$$

le signe $\sum_0^{20}$ désignant le symbole de la formule des trapèzes (n° 6).

Volume V_n de la carène limitée à la $n^{\text{ième}}$ flottaison inclinée :

$$V_n = \int_0^n A_k\,dz = h\lambda \sum_0^n \sum_0^{20} (u_k - u'_k),$$

le signe $\sum_0^n \sum_0^{20}$ désignant le symbole de l'intégration double par la méthode des trapèzes (n° 9).

$M_{A'B'}(A_k)$, moment par rapport à l'axe A′B′ de l'aire A_k :

$$M_{A'B'}(A_k) = \int_{N'}^{B} (u_k - u'_k)\,dx \left(\frac{u_k + u'_k}{2}\right) = \frac{\lambda}{2} \sum_0^{20} (u_k^2 - u_k'^2).$$

X_k, distance au plan A′B′ du centre de gravité de la $k^{\text{ième}}$ section inclinée :

$$A_k X_k = M_{A'B'}(A_k) = \frac{\lambda}{2} \sum_0^{20} (u_k^2 - u_k'^2).$$

$M_{A'B'}(V_n)$, moment par rapport au plan A′B′ du volume V_n :

$$M_{A'B'}(V_n) = \int_0^n A_k\,dz.X_k = \int_0^n A_k X_k.dz = h\,\frac{\lambda}{2} \sum_0^n \sum_0^{20} (u_k^2 - u_k'^2).$$

Ξ_n, distance au plan A′B′ du centre de la carène de volume V_n :

$$\Xi_n V_n = M_{A'B'}(V_n) = h\,\frac{\lambda}{2} \sum_0^n \sum_0^{20} (u_k^2 - u_k'^2),$$

d'où

$$\Xi_n = \frac{h\,\frac{\lambda}{2} \sum_0^n \sum_0^{20} (u_k^2 - u_k'^2)}{h\lambda \sum_0^n \sum_0^{20} (u_k - u'_k)} = \frac{1}{2}\,\frac{\sum_0^n \sum_0^{20} (u^2 - u'^2)}{\sum_0^n \sum_0^{20} (u - u')}.$$

Puis, comme dans la méthode Benjamin, on cherche $Z'_n = \frac{d - \Xi_n}{\sin\alpha}$, d'où ensuite le bras de levier b de stabilité, si l'on connaît la position du centre de gravité du navire, et qu'on désigne par g la hauteur de ce point sur la verticale milieu au-dessus du point A,

$$b = (Z'_n - g)\sin\alpha.$$

Les valeurs de Z' calculées pour l'angle donné α, réunies par une courbe graphique, donnent l'isocline α de la fonction $Z' = f(V, \theta)$;

pour avoir l'isocline 0°, c'est-à-dire les hauteurs des métacentres initials au-dessus du point A, on n'a qu'à se reporter aux Tableaux de calculs des carènes droites, qui fournissent la hauteur métacentrique initiale, r_0, au-dessus du centre de poussée droit, dont la distance ζ à la ligne d'eau o, est aussi calculée dans ces mêmes Tableaux. On aura donc, pour chaque carène droite de volume V_n,

$$Z'_0 = r_0 + \zeta.$$

Un exemple des Tableaux spéciaux nécessaires aux calculs des carènes inclinées par la méthode Benjamin-Spence se trouve à la fin du présent paragraphe. Il faut remplir autant de ces Tableaux que l'on veut avoir de courbes isoclines (quatre en général, pour 10°, 20°, 30° et 40°).

Le Tableau I est une reproduction de la légende des dimensions principales du bâtiment. Le Tableau II contient certaines indications nécessaires aux calculs, telles que les valeurs de h', de λ, de d et la valeur du facteur $\frac{1}{\sin\alpha}$. C'est sur les Tableaux III et III' qu'on relève les longueurs des ordonnées des sections isoclines. On trace en général dix sections inclinées et l'on calcule les volumes et les distances des centres de carène à l'axe des moments pour les cinq carènes limitées par les sections n°s 6, 7, 8, 9 et 10. Chaque section inclinée nécessite l'emploi d'une travée de quatre colonnes, pour les ordonnées u et u', et pour les carrés de ces ordonnées, u^2 et u'^2, dont les sommes verticales sont U et U', U^2 et U'^2.

L([1])

CALCUL DES ÉLÉMENTS GÉOMÉTRIQUES

DES CARÈNES INCLINÉES TRANSVERSALEMENT

(Méthode Benjamin-Spence).

Nom de l'auteur des calculs :

Dimensions principales du bâtiment. TABLEAU I.

Longueur entre perpendiculaires, de l'axe du gouvernail à l'extrémité A de la carène (contour extérieur de l'étrave à la flottaison, ou pointe de l'éperon)..	$\Lambda =$	
Longueur à la flottaison en charge (ligne d'eau n° 10 du plan des formes)............................	$L' =$	
Longueur de la carène, de la perpendiculaire A à la face R de l'étambot A..........................	$L =$	
Largeur extérieure de la carène au fort, située à au-dessus ou au-dessous de la flottaison en charge.	$l =$	
Largeur extérieure maxima à la flottaison en charge.	$l' =$	
Creux sur fond de carène, au milieu, à la ligne droite des baux du pont supérieur.......	$c =$	
Profondeur de carène, au milieu, correspondant à la flottaison en charge............................	$p =$	
Tableau de la quille et de la fausse quille au milieu.	$q =$	
Tirants d'eau en charge — à la perpendiculaire R....		
Tirants d'eau en charge — à la perpendiculaire A.. .		
Tirants d'eau en charge — à la perpendiculaire M...	$p + q =$	
Tirants d'eau en charge — différence.............. .	$\Delta =$	
Assiette prévue....................	$\frac{\Delta}{\Lambda} =$	

Données à consulter pour les calculs relatifs à l'inclinaison de °. TABLEAU II.

Équidistance des sections ou lignes d'eau inclinées..	$h' =$	
Équidistance des couples du plan des formes........	$\lambda = \frac{\Lambda}{20} =$	
Distance de l'axe des moments au point d'intersection de la PpM avec la ligne d'eau zéro du plan des formes..	$d =$	
La ligne d'eau inclinée zéro est tangente à la maîtresse section du plan des formes.		
Valeur de $\frac{1}{\sin\ °}$............	$\frac{1}{\sin\ °} =$	

([1]) Nom du bâtiment.

Calculs relatifs à l'inclinaison °.

NUMÉROTAGE des couples et facteurs.	LIGNE D'EAU INCLINÉE 1. DISTANCES DU COUPLE à l'axe des moments		CARRÉS des distances		LIGNE D'EAU INCLINÉE 2. DISTANCES DU COUPLE à l'axe des moments		CARRÉS des distances	
	maxima u_1.	minima	maxima u_1^2	minima $u_1'^2$.	maxima u_2.	minima u_2'.	maxima u_2^2.	minima $u_2'^2$.
Pp N — ½								
9								
8								
7								
6								
5								
4								
3								
2								
1								
Pp M								
1								
2								
3								
4								
5								
6								
7								
8								
9								
Pp R — ½								
Sommes des colonnes.	U_1 =	U_1' =	U_1^2 =	$U_1'^2$ =	U_2 =	U_2' =	U_2^2 =	$U_2'^2$ =
Différences des sommes.	$2\delta_1 = U_1 - U_1' =$ $\delta_1 =$		$2\Delta_1 = U_1^2 - U_1'^2 =$ $\Delta_1 =$		$2\delta_2 = U_2 - U_2' =$ $\delta_2 =$		$2\Delta_2 = U_2^2 - U_2'^2 =$ $\Delta_2 =$	

$A_1 = \lambda . 2\delta_1 =$
$S_1 =$
$V_1 =$
$\Sigma_1 =$
$\Xi_1 = \frac{1}{2}\frac{\Sigma_1}{S_1} =$
$Z_1' = \frac{1}{\sin\ °}(d - \Xi_1) =$

$A_2 = \lambda . 2\delta_2 =$
$S_2 =$
$V_2 =$
$\Sigma_2 =$
$\Xi_2 = \frac{1}{2}\frac{\Sigma_2}{S_2} =$
$Z_2' = \frac{1}{\sin\ °}(d - \Xi_2) =$

TABLEAU III.

LIGNE D'EAU INCLINÉE 6.				LIGNE D'EAU INCLINÉE 7.			
DISTANCES DU COUPLE à l'axe des moments		CARRÉS des distances		DISTANCES DU COUPLE à l'axe des moments		CARRÉS des distances	
maxima u_6.	minima u'_6.	maxima u_6^2.	minima u'^2_6.	maxima u_7	minima u'_7.	maxima u_7^2.	minima u'^2_7.
U_6 =	U'_6 =	U_6^2 =	U'^2_6 =	U_7 =	U'_7 =	U_7^2 =	U'^2_7 =
$2\delta_6 = U_6 - U'_6 =$ $\delta_6 =$		$2\Delta_6 = U_6^2 - U'^2_6 =$ $\Delta_6 =$		$2\delta_7 = U_7 - U'_7 =$ $\delta_7 =$		$2\Delta_7 = U_7^2 - U'^2_7 =$ $\Delta_7 =$	
$A_6 = \lambda . 2\delta_6 =$ $S_6 =$ $V_6 =$ $\Sigma_6 =$ $\Xi_6 = \frac{1}{2}\frac{\Sigma_6}{S_6} =$ $Z'_6 = \frac{1}{\sin\ ^\circ}(d - \Xi_6) =$				$A_7 = \lambda . 2\delta_7 =$ $S_7 =$ $V_7 =$ $\Sigma_7 =$ $\Xi_7 = \frac{1}{2}\frac{\Sigma_7}{S_7} =$ $Z'_7 = \frac{1}{\sin\ ^\circ}(d - \Xi_7) =$			

TABLEAU III'.

LIGNE D'EAU INCLINÉE 10.				OBSERVATIONS.
DISTANCES DU COUPLE à l'axe des moments		CARRÉS des distances		
maxima u_{10}.	minima u'_{10}.	maxima u^2_{10}.	minima u'^2_{10}.	
				Figure type pour le relevé des ordonnées.
U_{10} =	U'_{10} =	U^2_{10} =	U'^2_{10} =	*Formules générales à employer pour les Tableaux III et III'.*
$2\delta_{10} = U_{10} - U'_{10} =$ $\delta_{10} =$		$2\Delta_{10} = U^2_{10} - U'^2_{10} =$ $\Delta_{10} =$		$S_n = 2\delta_1 + \ldots + 2\delta_{n-1} + \delta_n,$ $S_{n+1} = S_n + \delta_n + \delta_{n+1},$ $V_n = h'.\lambda.S_n,$ $\Sigma_n = 2\Delta_1 + \ldots + 2\Delta_{n-1} + \Delta_n,$ $\Sigma_{n+1} = \Sigma_n + \Delta_n + \Delta_{n+1}.$
$A_{10} = \lambda . 2\delta_{10} =$ $S_{10} =$ $V_{10} =$ $\Sigma_{10} =$ $\Xi_{10} = \frac{1}{2}\frac{\Sigma_{10}}{S_{10}} =$ $Z'_{10} = \frac{1}{\sin \theta}(d - \Xi_{10}) =$				

En bas de chaque travée se trouvent les différences $2\delta = U - U'$ et $2\Delta = U^2 - U'^2$, qui ne sont autre chose que $\sum_0^{20}(u - u')$ et $\sum_0^{20}(u^2 - u'^2)$, et qui vont servir de point de départ aux calculs qu'on trouve indiqués successivement dans l'ordre suivant :

A_k (aire de la section inclinée) $= \lambda . 2\delta_k$,

S_n (somme des aires, au facteur λ près) $= 2\delta_1 + 2\delta_2 + \ldots + \delta_n$,

$$V_n = h'(A_1 + A_2 + \ldots + \tfrac{1}{2} A_n) = h'\lambda(2\delta_1 + \delta_2 + \ldots + \delta_n) = h'\lambda S_n,$$

$$\Sigma_n = 2\Delta_1 + 2\Delta_2 + \ldots + \Delta_n,$$

$$\Xi_n = \frac{1}{2}\frac{\Sigma_n}{S_n},$$

$$Z'_n = \frac{d - \Xi_n}{\sin\alpha}.$$

On reconnaît dans S_n et dans Σ_n les intégrations doubles $\sum_0^n\sum_0^{20}(u - u')$ et $\sum_0^n\sum_0^{20}(u^2 - u'^2)$. On remarquera que la section inclinée zéro, se réduisant constamment à un point, donne constamment $\delta_0 = 0$, $\Delta_0 = 0$, $A_0 = 0$; c'est pourquoi ces termes ont été supprimés dans les sommations par la formule des trapèzes, et pourquoi la travée de la ligne d'eau inclinée zéro n'existe pas dans le Tableau III.

Quand les calculs ci-dessus ont été effectués pour une travée, on passe facilement de leurs résultats à ceux de la travée suivante en formant les sommes fondamentales S_{n+1} et Σ_{n+1} de la façon suivante :

$$S_{n+1} = S_n + \delta_n + \delta_{n+1},$$
$$\Sigma_{n+1} = \Sigma_n + \Delta_n + \Delta_{n+1}.$$

On forme donc directement les sommes fondamentales S_n et Σ_n pour la première carène que l'on veut calculer (celle limitée par la section 6), puis on opère par additions successives pour les sommes semblables des autres carènes (limitées par les sections 7, 8, 9, 10). Il est clair que, si l'on voulait calculer, avec les chiffres des Tableaux, les distances X_k à l'axe des moments des centres de gravité des sections inclinées, on n'aurait qu'à effectuer dans chaque travée les calculs suivants :

$$M_k = \frac{\lambda}{2} 2\Delta_k = \lambda\Delta_k$$

et

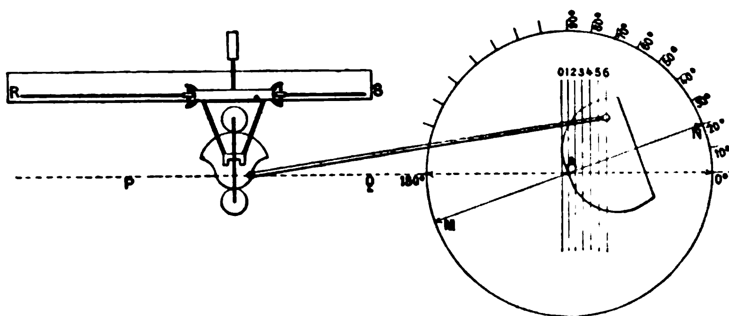
$$X_k = \frac{M_k}{A_k} = \frac{\lambda \Delta_k}{\frac{\lambda}{2} 2\delta_k} = \frac{1}{2}\frac{\Delta_k}{\delta_k}.$$

56. Méthode planimétrique de M. H. Fellow. Inclinaisons transversales.

La méthode suivante, due à M. Henry Fellow, chef dessinateur de la maison Denny, de Dumbarton, est très rapide, mais exige l'emploi d'un outillage planimétrique : planimètre à deux roulettes donnant les aires et leurs moments, table à rotation pour la disposition du vertical du plan des formes.

Soit (*fig.* 81) une table, pouvant tourner autour de son centre et en forme de disque, sur laquelle est tracée la droite MN. On

Fig. 81.

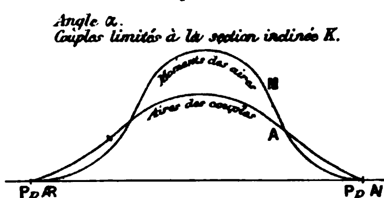


commence par y fixer le vertical, de telle sorte que son axe coïncide avec MN et que le point connu A de cet axe coïncide avec le centre du disque. On fait ensuite tourner le disque devant un cadran gradué fixe, jusqu'à ce que MN fasse avec la ligne 180°-0° l'angle α pour lequel on veut calculer les courbes isoclines. On place ensuite le planimètre de façon que son axe PQ coïncide avec la ligne 180°-0°, le chemin de roulement RS étant parallèle à PQ. Cela fait, comme dans la méthode Benjamin-Spence, on trace un réseau de droites parallèles sur un papier calque que l'on vient appliquer sur le vertical placé sur le disque et de manière que le réseau soit perpendiculaire à la ligne 180°-0°, tout en ayant sa ligne extrême tangente au contour du maître-couple. Dans cette position du disque, c'est-à-dire sous l'angle constant α,

on contourne chaque portion immergée du couple (limitée à chacune des sections inclinées 1, 2, 3, ... 10, et supposée tracée symétriquement sur le vertical, à droite et à gauche de la perpendiculaire milieu) et l'on note à chaque fois, sur des imprimés semblables au modèle ci-après, l'aire et le moment par rapport à la ligne 180°-0°.

On porte alors les résultats obtenus (aires et moments) pour toutes les portions des différents couples limitées à une même section inclinée k, en ordonnées, en prenant pour axe des abscisses un axe de longueur du navire et pour abscisses de chaque résultat la place du couple correspondant sur la longueur. On fait passer des courbes continues A et M (*fig.* 82) par les points obtenus, et le planimètre est alors employé de nouveau pour la quadrature de ces courbes. L'intégrale de A donne le déplacement V_k de la carène limitée à la section inclinée k, et le quotient de l'intégrale de M par l'intégrale de A donne la distance Y_k du centre de la carène V_k à l'axe 180°-0° passant par le point fixe A; c'est la coordonnée Y de la première méthode Benjamin, ou $d - \Xi$ de la méthode Benjamin-Spence.

Fig. 82.



Pour le même angle α, on trace d'habitude les courbes A et M pour six sections inclinées, soit 12 courbes.

On fait ensuite tourner le disque jusqu'à ce que la ligne MN de la *fig.* 81 atteigne un deuxième angle α, on déplace convenablement le calque portant le réseau des sections inclinées, et l'on recommence les opérations. On effectue ordinairement les calculs pour six angles α (15°, 30°, 45°, 60°, 75° et 90°), d'où le tracé de 72 courbes (36 courbes A, 36 courbes M).

Les courbes A et M sont appelées *cross-curves,* ou encore *courbes d'interpolation de stabilité.*

La méthode planimétrique de M. Fellow (ou des *cross-curves*) a l'avantage de permettre la prise en considération des superstructures; mais elle nécessite le tracé complet ou symétrique de tous les couples, qui ne sont généralement donnés que d'un côté sur le vertical du plan des formes; c'est là un inconvénient assez sérieux auquel a remédié M. Couwenberg de la façon qui va être dite.

CALCUL DES CARÈNES INCLINÉES PAR LA MÉTHODE PLANIMÉTRIQUE FELLOW.

Tableau relatif à l'inclinaison α. $\frac{1}{\sin\alpha} =$

NUMÉROS des couples.	LIGNES D'EAU INCLINÉES DE L'ANGLE α, LIMITANT LES CARÈNES SUCCESSIVES.											
	LIGNE D'EAU 1.		LIGNE D'EAU 2.		LIGNE D'EAU 3		LIGNE D'EAU 4.		LIGNE D'EAU 5		LIGNE D'EAU 6.	
	Aire du couple.	Moment de cette aire.	Aire du couple.	Moment de cette aire.	Aire du couple.	Moment de cette aire.	Aire du couple.	Moment de cette aire.	Aire du couple.	Moment de cette aire.	Aire du couple.	Moment de cette aire.
P p Ɲ												
9												
8												
7												
6												
5												
4												
3												
2												
1												
P p M												
1												
2												
3												
4												
5												
6												
7												
8												
9												
P p Ʀ												
	Aire $A_1 = V_1 =$ Aire $M_1 =$ $Y_1 = \frac{M_1}{A_1} =$ $Z'_1 = \frac{1}{\sin\alpha} Y_1 =$		Aire $A_2 = V_2 =$ Aire $M_2 =$ $Y_2 = \frac{M_2}{A_2} =$ $Z'_2 = \frac{1}{\sin\alpha} Y_2 =$		Aire $A_3 = V_3 =$ Aire $M_3 =$ $Y_3 = \frac{M_3}{A_3} =$ $Z'_3 = \frac{1}{\sin\alpha} Y_3 =$		Aire $A_4 = V_4 =$ Aire $M_4 =$ $Y_4 = \frac{M_4}{A_4} =$ $Z'_4 = \frac{1}{\sin\alpha} Y_4 =$		Aire $A_5 = V_5 =$ Aire $M_5 =$ $Y_5 = \frac{M_5}{A_5} =$ $Z'_5 = \frac{1}{\sin\alpha} Y_5 =$		Aire $A_6 = V_6 =$ Aire $M_6 =$ $Y_6 = \frac{M_6}{A_6} =$ $Z'_6 = \frac{1}{\sin\alpha} Y_6 =$	

57. Méthode planimétrique de M. Couwenberg. Inclinaisons transversales.

Pour éviter le tracé symétrique de tous les couples sur le vertical du plan de formes, M. Couwenberg revient tout simplement à la méthode Benjamin, en effectuant les calculs à l'aide du planimètre. C'est ainsi qu'au lieu de faire les aires des couples immergés, on fait ici les aires des lignes d'eau inclinées et leurs moments par rapport à l'axe 180°-0°. L'intégrale des aires donne encore le déplacement, et le quotient de l'intégrale des moments par celle des aires donne encore la coordonnée Y du centre de carène.

Dans cette méthode, il n'est plus besoin de tracer les deux côtés du couple. Il suffit (*fig.* 83) de tracer sur le vertical ordinaire les deux axes symétriques AO, AO′ et les deux réseaux symétriques

Fig. 83.

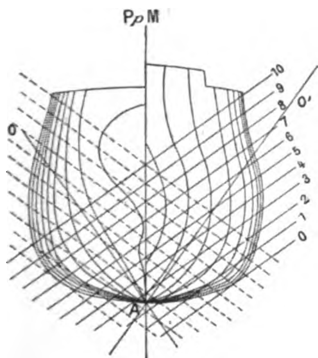
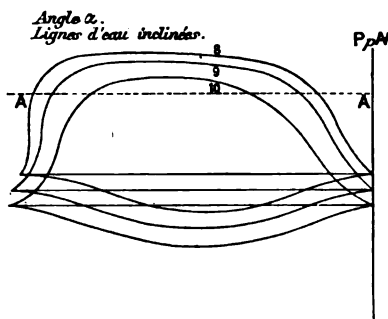


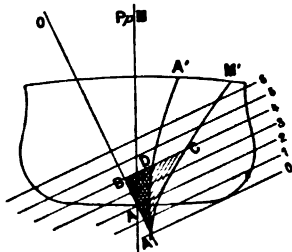
Fig. 84.



de sections inclinées, comme dans la méthode Spence, ce qui a par ailleurs l'avantage de supprimer l'emploi de la table à rotation. Mais il faut alors, au moyen des cotes relevées sur le vertical du plan de formes, tracer complètement, et des deux côtés, toutes les lignes d'eau inclinées de l'angle α, soit 6 lignes d'eau complètes pour un angle et 36 pour les 6 angles considérés (*fig.* 84). Après avoir effectué ce tracé, qui remplace celui des 20 demi-couples nécessités par la méthode Fellow, on n'a plus, il est vrai, qu'à tracer une courbe A′A′ (*fig.* 85) des aires des lignes d'eau inclinées de l'angle α et une courbe A′M′ des moments de ces aires par rapport au plan des moments AO. On effectuera alors, pour

chacune des six sections inclinées de l'angle α, le quotient de l'aire A′BC par l'aire A′BD, ce qui fournira six points de l'isocline α de la fonction $Y = F(V, \theta)$, ou de $Z' = f(V, \theta)$, pour des valeurs de V données par les six aires, telles que A′BD.

Fig. 85.



En somme, si nous comparons la méthode Couwenberg à la méthode Fellow, nous constatons qu'il y a à faire, de chaque côté, le nombre suivant d'opérations :

Méthode Fellow.

Tracés...............	20 demi-couples. 36 courbes A. 36 courbes M.
Intégrations..........	$6.20.6 = 720$ couples. 36 courbes A. 36 courbes M.
Quotients............	36 quotients $\frac{M}{A}$.

Méthode Couwenberg.

Tracés...............	36 lignes d'eau dissymétriques. 6 courbes A′. 6 courbes M′.
Intégrations..........	$6.6 = 36$ lignes d'eau. 36 sur les courbes A′. 36 sur les courbes M′.
Quotients............	36 quotients $\frac{M'}{A'}$.

En remarquant que le tracé et l'intégration des 36 lignes d'eau (Couwenberg) sont à peu près équivalents au tracé et à l'intégration des 72 courbes A et M (Fellow), il ressort, en faveur de la méthode Couwenberg, une économie de 8 tracés de courbes et de

648 intégrations ou opérations planimétriques, ce qui est considérable.

Il va sans dire que, dans les méthodes Fellow ou Couwenberg, on peut, à volonté, envisager la coordonnée Y ou la coordonnée $Z' = \frac{Y}{\sin\alpha}$, comme dans la méthode Benjamin-Spence.

Voici un Tableau applicable à la méthode Couwenberg.

CALCUL DES CARÈNES INCLINÉES PAR LA MÉTHODE PLANIMÉTRIQUE COUWENBERG.

Tableau relatif à l'inclinaison α. $\frac{1}{\sin\alpha} =$

NUMÉROS des lignes d'eau inclinées.	AIRES des lignes d'eau inclinées.	MOMENTS de ces aires.	VOLUMES des carènes inclinées A'.	MOMENTS de ces volumes. M'.	VALEURS de $Y = \frac{M'}{A'}$.	VALEURS de $Z' = \frac{1}{\sin\alpha} Y$.
0						
1						
2						
3						
4						
5						
6						

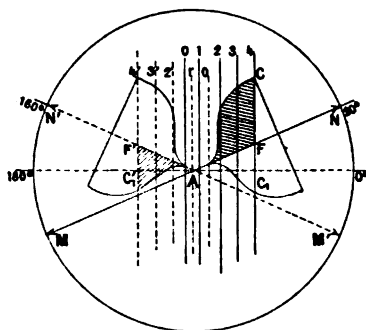
58. Méthode planimétrique mixte de M. Macfarlane Gray. Inclinaisons transversales.

En 1875, bien avant MM. Fellow et Couwenberg, M. Macfarlane Gray avait indiqué une méthode planimétrique qu'on trouve décrite en détail dans l'Ouvrage de M. Reed sur la stabilité des navires ([1]), et qui dispense de tracer sur le vertical les deux côtés symétriques des couples. La méthode Macfarlane Gray serait rendue très pratique par l'emploi de la table à rotation que nous avons décrite en parlant de la méthode Fellow (n° 56).

([1]) Sir E.-J. Reed, *The stability of ships*, p. 181 et suivantes.

Soit donc un couple quelconque CAC_1 (*fig.* 86), dont une moitié seulement CA est supposée tracée; on ne pourra prendre l'aire et le moment de la portion située au-dessous de la flottaison inclinée

Fig. 86.



CFC_1 que pour la partie ACF. Mais la partie manquante AFC_1 se retrouvera identiquement, si, après avoir opéré pour tous les demi-couples dans la position MN de l'axe du navire, on dispose tout symétriquement par rapport à une perpendiculaire à l'axe des moments 0°-180°, c'est-à-dire si l'on amène MN en M'N' et si l'on approche le calque du réseau de sections par la droite au lieu de l'approcher par la gauche. L'aire et le moment par rapport à l'axe 0°-180° de la portion $AF'C'_1$ du demi-couple tracé seront alors égaux à l'aire et au moment de la partie manquante AFC_1.

A ce moment des opérations, M. Macfarlane Gray n'emploie plus le planimètre; au lieu de construire des courbes A et M et d'en chercher les aires au moyen d'un instrument, il effectue des intégrations numériques en employant la règle de Simpson et en remarquant que dans la formule générale,

$$A = \int_{\mathcal{N}}^{\mathcal{R}} y\,dx = \frac{\lambda}{3}[y_{10\mathcal{R}} + 4y_{9\mathcal{R}} + 2y_{8\mathcal{R}} + \ldots + 2y_{8\mathcal{N}} + 4y_{9\mathcal{N}} + y_{10\mathcal{N}}],$$

les premier et dernier termes de la parenthèse sont en général très petits et peuvent se supprimer. Il écrit donc simplement

$$A = \int_{\mathcal{N}}^{\mathcal{R}} y\,dx = \frac{2\lambda}{3}[2y_{9\mathcal{R}} + y_{8\mathcal{R}} + \ldots + y_{8\mathcal{N}} + 2y_{9\mathcal{N}}],$$

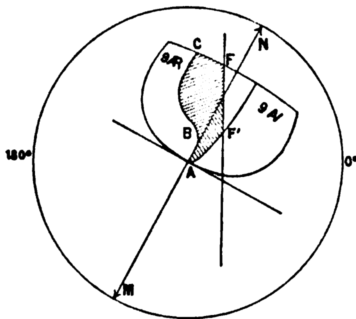
c'est-à-dire, en appelant I la somme des termes impairs et P celle des termes pairs,

$$A = \frac{2\lambda}{3}[2I + P].$$

Dès lors la marche à suivre est celle-ci :

Placer tout d'abord la table à rotation de façon que la ligne MN fasse l'angle α avec l'axe 0°-180°; dans cette position, on associe les demi-couples de même numéro de l'avant et de l'arrière, en nommant ces groupes *pairs* ou *impairs* suivant le numéro des demi-couples qu'ils renferment; c'est ainsi qu'on aura les groupes pairs : 10Ꜹ-10AR; 8Ꜹ-8AR; ...; 0Ꜹ-0AR (maître couple); et les groupes impairs 9Ꜹ-9AR; 7Ꜹ-7AR; ...1; Ꜹ-1AR. Le planimètre étant maintenant en place, avec son style en A au centre du disque (*fig.* 87), on note, avant toute opération, les chiffres initiaux I_0

Fig. 87.



et μ_0 marqués sur les roulettes des aires et des moments et on les inscrit à part (*voir* le Tableau de la méthode Macfarlane Gray ci-après). On commence alors par les groupes impairs et, pour le groupe 9Ꜹ-9AR par exemple, on part du point A et l'on décrit dans le sens des aiguilles d'une montre le contour ABCFF'A, et ainsi des autres. Quand on a parcouru tous les groupes impairs, on fait une lecture sur les roulettes et l'on inscrit les chiffres trouvés I et μ. On fait ensuite les différences $I - I_0$ et $\mu - \mu_0$, que l'on inscrit à côté deux fois, puisque ces termes doivent être doublés dans les sommations. Cela fait, on passe aux groupes pairs; mais, comme, entre les deux opérations, il pourrait y avoir eu interruption et que l'instrument pourrait avoir été dérangé, on fait, tout d'abord, une lecture dont on inscrit les résultats P_0 et M_0. Après

l'opération des groupes pairs, une autre lecture donne les chiffres P et M. On fait les différences $P - P_0$ et $M - M_0$, qu'on porte, sans les doubler, sous les différences correspondantes $I - I_0$ et $\mu - \mu_0$.

Quand on en est là, on dispose la table à rotation à l'angle 180°-α, symétrique de α, et l'on approche symétriquement le réseau de sections du vertical ainsi placé, pour recommencer les quadratures des groupes de demi-couples. On obtient de la sorte les nouvelles différences $2(I' - I'_0)$ et $(P' - P'_0)$, puis $2(\mu' - \mu'_0)$ et $(M' - M'_0)$, à ajouter respectivement aux différences déjà trouvées.

Le volume de carène est

$$V = [2(I - I_0) + 2(I' - I'_0) + (P - P_0) + (P' - P'_0)] \frac{2\lambda}{3} = \frac{2\lambda}{3} \Sigma,$$

et le moment de ce volume

$$M_v = [2(\mu - \mu_0) + 2(\mu' - \mu'_0) + (M - M_0) + (M' - M'_0)] \frac{2\lambda}{3} = \frac{2\lambda}{3} \Sigma'.$$

La coordonnée Y du centre du volume V est dès lors

$$Y = \frac{\Sigma'}{\Sigma},$$

et la coordonnée Z'

$$Z' = \frac{1}{\sin\alpha} Y.$$

Il est clair qu'en employant la règle d'intégration des trapèzes et en y négligeant les premier et dernier termes comme le fait M. Gray, on simplifie notablement les calculs; il est alors inutile de distinguer les groupes en groupes pairs et en groupes impairs, il n'y a plus que deux sommes d'aires des couples, $A - A_0$ et $A' - A'_0$, et deux sommes de moments de ces aires, $B - B_0$ et $B' - B'_0$, pour les deux positions de la table à rotation, et l'on a

$$V = (A - A_0 + A' - A'_0)\lambda = \lambda\Sigma, \qquad M_v = (B - B_0 + B' - B'_0)\lambda = \lambda.\Sigma',$$

$$Y = \frac{\Sigma'}{\Sigma} \qquad \text{et} \qquad Z' = \frac{1}{\sin\alpha} Y.$$

CALCUL DES CARÈNES INCLINÉES PAR LA MÉTHODE PLANIMÉTRIQUE MIXTE MACFARLANE GRAY.

(Emploi de la règle des paraboles pour l'intégration.)

Tableau relatif à l'inclinaison α.

$\frac{1}{\sin\alpha} =$

$\lambda =$

LIGNES D'EAU, INCLINÉES DE L'ANGLE α, LIMITANT LES CARÈNES SUCCESSIVES.

LIGNE D'EAU 1.	LIGNE D'EAU 2.	LIGNE D'EAU 3, ...	LIGNE D'EAU 6.
$I_0 =$ $I - I_0 =$ $\mu_0 =$ $\mu - \mu_0 =$	$I_0 =$ $I - I_0 =$ $\mu_0 =$ $\mu - \mu_0 =$		
$I =$ $I - I_0 =$ $\mu =$ $\mu - \mu_0 =$	$I =$ $I - I_0 =$ $\mu =$ $\mu - \mu_0 =$		
$P_0 =$ $P - P_0 =$ $M_0 =$ $M - M_0 =$	$P_0 =$ $P - P_0 =$ $M_0 =$ $M - M_0 =$		
$P =$ » $M =$ »	$P =$ » $M =$ »		
$I'_0 =$ $I' - I'_0 =$ $\mu'_0 =$ $\mu' - \mu'_0 =$	$I'_0 =$ $I' - I'_0 =$ $\mu'_0 =$ $\mu' - \mu'_0 =$		
$I' =$ $I' - I'_0 =$ $\mu' =$ $\mu' - \mu'_0 =$	$I' =$ $I' - I'_0 =$ $\mu' =$ $\mu' - \mu'_0 =$		
$P'_0 =$ $P' - P'_0 =$ $M'_0 =$ $M' - M'_0 =$	$P'_0 =$ $P' - P'_0 =$ $M'_0 =$ $M' - M'_0 =$		
$P' =$ » $M' =$ »	$P' =$ » $M' =$ »		
$\Sigma_1 =$ $\Sigma'_1 =$	$\Sigma_2 =$ $\Sigma'_2 =$		
$V_1 = \frac{2\lambda}{3}\ \Sigma_1 =$	$V_2 = \frac{2\lambda}{3}\ \Sigma_2 =$		
$Y_1 = \frac{\Sigma'_1}{\Sigma_1} =$	$Y_2 = \frac{\Sigma'_2}{\Sigma_2} =$		
$Z'_1 = \frac{1}{\sin\alpha}\ Y_1 =$	$Z'_2 = \frac{1}{\sin\alpha}\ Y_2 =$		

CALCUL DES CARÈNES INCLINÉES PAR LA MÉTHODE PLANIMÉTRIQUE MIXTE MACFARLANE GRAY.

(Emploi de la règle des trapèzes pour l'intégration.)

Tableau relatif à l'inclinaison α.

$\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{1}{\sin\alpha} = \\ \lambda = \end{array} \right.$

LIGNES D'EAU, INCLINÉES DE L'ANGLE α, LIMITANT LES CARÈNES SUCCESSIVES.			
LIGNE D'EAU 1.	LIGNE D'EAU 2.	LIGNE D'EAU 3, ...	LIGNE D'EAU 6.
$A_0 =$ $A - A_0 =$ $B_0 =$ $B - B_0 =$ $A =$ » $B =$ » $A'_0 =$ $A' - A'_0 =$ $B'_0 =$ $B' - B'_0 =$ $A' =$ » $B' =$ » $\Sigma_1 =$ $\Sigma'_1 =$	$A_0 =$ $A - A_0 =$ $B_0 =$ $B - B_0 =$ $A =$ » $B =$ » $A'_0 =$ $A' - A'_0 =$ $B'_0 =$ $B' - B'_0 =$ $A' =$ » $B' =$ » $\Sigma_2 =$ $\Sigma'_2 =$		
$V_1 = \lambda\Sigma_1 =$ $Y_1 = \dfrac{\Sigma'_1}{\Sigma_1} =$ $Z'_1 = \dfrac{1}{\sin\alpha} Y_1 =$	$V_2 = \lambda\Sigma_2 =$ $Y_2 = \dfrac{\Sigma'_2}{\Sigma_2} =$ $Z'_2 = \dfrac{1}{\sin\alpha} Y_2 =$		

CHAPITRE VIII.

APPLICATION AU NAVIRE DES MÉTHODES DE CALCUL POUR LES CARÈNES INCLINÉES.

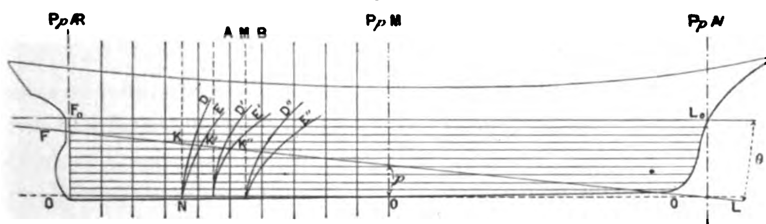
MÉTHODES EMPLOYANT LE RÉSEAU DES SECTIONS DROITES DU PLAN DES FORMES.

59. Méthode Bonjean. — Inclinaisons longitudinales.

Pour calculer, avec le seul secours du réseau des sections droites du plan des formes, les éléments géométriques d'une carène inclinée longitudinalement et définie par la profondeur de carène p et l'inclinaison θ de la flottaison actuelle sur la flottaison en charge, on fait généralement usage, en France, dans les arsenaux, quand θ a une valeur assez grande, de la méthode proposée au commencement du siècle par Bonjean, ingénieur de la Marine, et qui conduit à des tracés connus sous le nom d'*échelles de Bonjean*. C'est, en particulier, cette méthode qu'on emploie pour étudier les circonstances de l'importante opération du lancement.

Soit donc le plan de formes. On commence par partager le longitudinal en un certain nombre de tranches verticales. Bonjean se contentait de partager la distance entre les perpendiculaires ex-

Fig. 88.



trêmes en huit intervalles; mais ce nombre est insuffisant pour les bâtiments longs ou à formes tourmentées de l'époque actuelle, et l'on prend aujourd'hui vingt intervalles coïncidant précisément avec

les intervalles des couples de tracé du plan des formes. Dans chaque intervalle, tel que AB (*fig.* 88), on prend un axe milieu MN de la tranche verticale. On assimile chaque tranche AB à une carène isolée, dont il sera facile de calculer les volumes détachés successivement par les flottaisons droites du réseau des sections parallèles à F_0L_0. Cela fait, à partir de l'axe MN, on trace la courbe D des déplacements ainsi calculés pour cette tranche et la courbe E des moments des volumes par rapport à la ligne d'eau droite zéro, OO. On peut aussi, ce qui évite l'enchevêtrement final des courbes sur le longitudinal, projeter sur l'axe MN de la tranche les points de ces courbes dont les abscisses représentent les nombres entiers de tonneaux et de tonneaux-mètres, depuis o jusqu'au déplacement et au moment les plus élevés de la tranche. On numérote ces points de 10 en 10 tonneaux d'un côté et de 10 en 10 tonneaux-mètres de l'autre, et l'on a ainsi, pour chaque tranche, deux échelles ou jauges verticales sur lesquelles il suffira de lire les nombres inscrits à l'intersection K avec la flottaison inclinée donnée FL.

Le *déplacement total,* $D_{p\theta}$, de la carène inclinée donnée sera la somme des déplacements partiels relevés en K, K', K'', ... Comme vérification, on pourra construire une courbe ayant pour abscisses les distances des courbes et pour ordonnées les données des courbes D, D', D'', ... en K, K', K'', ... (ou encore les nombres lus en K, K', K'', ... sur les échelles de déplacement), et cette courbe devra être continue.

La *distance,* $\zeta_{p\theta}$, du centre de la carène inclinée donnée à la ligne d'eau droite zéro, perpendiculairement au réseau des sections droites, sera donnée par la somme des moments partiels mesurés en K, K', K'', ..., divisée par le déplacement total $D_{p\theta}$. En effet,

$$D_{p\theta}.\zeta_{p\theta} = m + m' + \ldots + m^{(n)}.$$

L'*abscisse,* $\xi_{p\theta}$, du centre de la carène inclinée donnée, en avant ou en arrière de la perpendiculaire milieu, s'obtiendra comme suit: appelons d_1, d_2, d_3, ... les déplacements partiels sur l'avant de cette perpendiculaire, d'_1, d'_2, d'_3, ... les déplacements partiels sur l'arrière, nous aurons, en appliquant le théorème des moments et en groupant les tranches situées à égale distance du milieu,

$$D_{p\theta}.\xi_{p\theta} = (d_1 - d'_1)\frac{\lambda}{2} + (d_2 - d'_2)\frac{3\lambda}{2} + (d_3 - d'_3)\frac{5\lambda}{2} + \ldots$$

ou

$$D_{p\theta}.\xi_{p\theta} = \frac{\lambda}{2}[(d_1 - d'_1) + 3(d_2 - d'_2) + 5(d_3 - d'_3) + \ldots].$$

Si l'abscisse ξ est positive, on devra la porter sur l'avant, ou inversement, puisque les moments ont été pris positifs sur l'avant, et négatifs sur l'arrière.

Quand on a terminé les calculs de la carène (p, θ), on peut, au moyen des courbes D, E, D', E', D'', E'', ... une fois tracées, calculer des carènes isoclines d'inclinaison θ et équidistantes, puis des carènes inclinées d'angles différents, θ', θ'', ..., mais ayant les mêmes profondeurs de carène p, p', p'', ... que les isoclines successives précédentes. Une fois en possession, pour ces carènes, des éléments D, ζ et ξ, on trace les isoclines et les isobathes de ces fonctions de p et de θ, lesquelles permettent, comme nous l'avons vu, d'en déterminer les isocarènes.

CALCUL DES CARÈNES INCLINÉES LONGITUDINALEMENT (MÉTHODE BONJEAN).

Calculs relatifs à la • tranche verticale pour l'inclinaison α.

NUMÉROS des lignes d'eau droites et facteurs k.	DEMI-ORDONNÉES du couple *N* de la tranche. (1)	DEMI-ORDONNÉES du couple *R* de la tranche. (2)	ADDITION des chiffres correspondants des colonnes (1) et (2). (3)	A_k DEMI-AIRES des lignes d'eau de la tranche. $A_k = \lambda \times (3)$ (4)	$\Sigma_0^n(2A_k)$ SOMMATION de la ligne d'eau 0 à la ligne n des aires des lignes d'eau. (5)	$h\Sigma_0^n(2A_k)$ VOLUMES LIMITES dans la tranche verticale à chacune des lignes d'eau droites, $h \times (5)$. (6)	$k.A_k$ PRODUITS des chiffres de (4) par les facteurs. (7)	$\Sigma_0^n(2kA_k)$ SOMMATION de la ligne 0 à la ligne n des moments des aires. (8)	$h^2\Sigma_0^n(2kA_k)$ MOMENTS par rapport à la ligne 0 des volumes (6). (9)
11									
10									
9									
8									
7									
6									
5									
4									
3									
2									
1									
0	»	»	»	»	0	0	0	0	0

Données. { Intervalle des couples du plan des formes........ . $\lambda =$
Intervalle des lignes d'eau du plan des formes...... $h =$
$h^2 =$

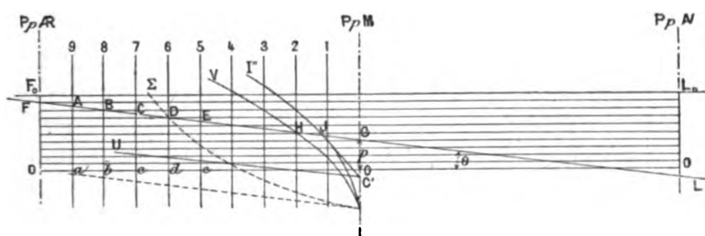
Formules à employer { pour la sommation (5) : $\Sigma_0^n(2A_k) = A_0 + 2A_1 + 2A_2 + \ldots + A_n$ $\quad \Sigma_0^{n+1}(2A_k) = \Sigma_0^n(2A_k) + A_n + A_{n+1}$
pour la sommation (8) : $\Sigma_0^n(2kA_k) = 0 + 2.A_1 + 2.2.A_2 + \ldots + nA_n$ $\quad \Sigma_0^{n+1}(2kA_k) = \Sigma_0^n(2kA_k) + nA_n + (n+1)A_{n+1}$

60. Méthode du vertical intégral. — Inclinaisons longitudinales.

Le vertical intégral, que nous avons appris à construire comme annexe des Tableaux de calculs des carènes droites, peut servir aux calculs des carènes inclinées longitudinalement.

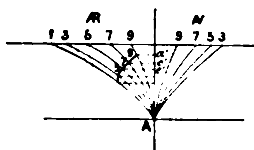
Soit, en effet, le longitudinal du plan des formes (*fig.* 89) sur lequel nous supposons tracée la flottaison inclinée proposée FL.

Fig. 89.



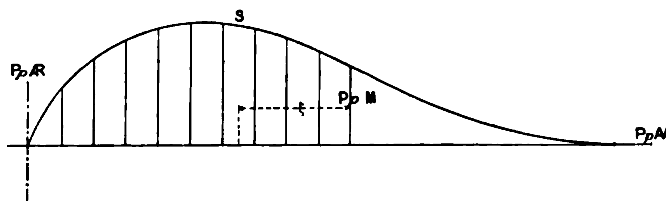
Relevons sur chaque couple les hauteurs telles que *a*A pour le 9Æ, *b*B pour le 8Æ, ..., et reportons ces hauteurs en A*a'*, A*b'*, A*c'*, ... sur l'axe du vertical intégral (*fig.* 90). Les ab-

Fig. 90.



scisses $\overline{a'9}$, $\overline{b'8}$, $\overline{c'7}$, ... ne sont autre chose que les aires des couples limités par la flottaison inclinée FL, à l'aide desquelles on construira facilement (*fig.* 91) une courbe S des aires immer-

Fig. 91.

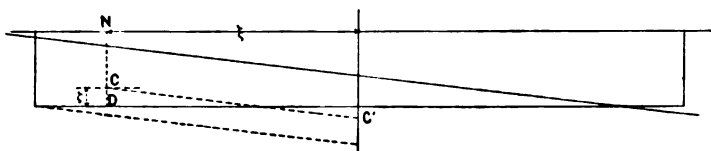


gées des couples. L'aire de cette courbe S donnera le volume $V_{p\theta}$ de la carène inclinée, que l'on portera en GH sur la flottaison

inclinée FL (*fig.* 89) à partir de la perpendiculaire milieu. D'autre part, le moment de la courbe S par rapport à cette perpendiculaire milieu, divisé par $V_{p\theta}$, fournira l'abscisse $\xi_{p\theta}$.

Pour avoir le $\zeta_{p\theta}$, nous recommencerons les mêmes constructions pour une série de carènes isoclines, c'est-à-dire inclinées du même angle θ, mais de profondeurs différentes, p', p'', p'''. En portant pour chacune d'elles, sur la flottaison correspondante (*fig.* 89), des longueurs obliques GH proportionnelles au volume de carène, et à partir de la perpendiculaire milieu, on pourra tracer une courbe V des volumes des carènes isoclines θ. Or cette courbe V est la courbe intégrale d'une certaine courbe Σ des aires des flottaisons inclinées limitant les carènes isoclines. Il est inutile de tracer cette courbe Σ, mais on doit se rappeler que l'abscisse suivant PpM du centre de gravité de cette courbe, limitée à une ordonnée oblique quelconque parallèle à FL, est la même que l'abscisse du centre de la carène limitée à la même flottaison. Si donc on trace l'intégrale seconde I'' de Σ, c'est-à-dire l'intégrale première de V, et qu'on mène en J la tangente à I'', cette tangente coupera PpM en un point C' tel que le centre de la carène $V_{p\theta}$, limitée par FL, sera sur la ligne oblique UC' (*fig.* 89). On a ainsi le moyen de placer en vraie position, c'est-à-dire en C (*fig.* 92), le centre de la carène $V_{p\theta}$, puisqu'on connaît

Fig. 92.



d'une part $\xi_{p\theta}$, c'est-à-dire une ligne NC qui le contient, et de l'autre une ligne $C'C$, qui le contient également. On connaîtra donc le $\zeta_{p\theta}$ cherché ou CD. Ainsi, les opérations faites jusqu'à présent nous fournissent V, ξ et ζ pour les isoclines θ; il ne reste plus qu'à tracer les flottaisons inclinées d'autres angles θ', θ'', ... et à recommencer, pour ces nouvelles carènes, ce qui a été fait pour les isoclines θ.

Les calculs des carènes inclinées longitudinalement étant très laborieux, on ne les fait d'habitude que pour cinq valeurs de p et pour deux valeurs de θ ne différant que par le signe, et l'on joint

aux résultats ceux des carènes droites relevés dans les Tableaux réglementaires, qui fournissent les isoclines $\theta = 0$. Dans ces conditions, les courbes isoclines θ, o, $-\theta$ sont assez bien déterminées par cinq points pour qu'on puisse interpoler par rapport à p; mais les isobathes ne sont pas assez bien déterminées par trois points pour qu'on puisse en déduire des interpolations par rapport à θ. Pour obtenir des points intermédiaires approchés, sans se livrer à de nouveaux tracés, on interpole d'ordinaire analytiquement, en supposant que sur chaque isobathe, p_1, p_2, p_3, ..., les trois points sont réunis par des arcs de paraboles.

CALCUL DES CARÈNES INCLINÉES LONGITUDINALEMEN

Calculs relatifs aux carènes isoclines pour l'angle 2

		FLOTTAISON INCLINÉE 3.		FLOTTAISON INCLINÉE 2.	
	NUMÉROS DES COUPLES et facteurs.	DEMI-ORDONNÉES de la flottaison inclinée intégrale. (1)	PRODUITS des chiffres de (1) par les facteurs. (2)	DEMI-ORDONNÉES de la flottaison inclinée intégrale. (3)	PRODUITS des chiffres de (3) par les facteurs. (4)
	10 AR				
	9				
	8				
	7				
	6				
	5				
	4				
	3				
	2				
	1				
Sommes AR	0	S_3	Σ_3	S_2	$\Sigma_2 =$
	1				
	2				
	3				
	4				
	5				
	6				
	7				
	8				
	9				
	10 AV				
Sommes AV		$S'_3 =$	$\Sigma'_3 =$	$S'_2 =$	$\Sigma'_2 =$
		$S_3 + S'_3 = A_3$	$\Sigma_3 - \Sigma'_3 = B_3 =$	$S_2 + S'_2 = A_2 =$	$\Sigma_2 - \Sigma'_2 = B_2 =$
		$V_3 = 2\lambda A_3 =$	$M_3 = 2\lambda^2 B_3 =$	$V_2 = 2\lambda A_2 =$	$M_2 = 2\lambda^2 B_2 =$
		$\xi_3 = \dfrac{M_3}{V_3} =$		$\xi_2 = \dfrac{M_2}{V_2} =$	

Intervalle des couples du plan de formes $\lambda =$

(MÉTHODE DU VERTICAL INTÉGRAL).

TABLEAU I.

FLOTTAISON INCLINÉE 1		FLOTTAISON INCLINÉE 0.		FLOTTAISON INCLINÉE — 1.	
DEMI-ORDONNÉES de la flottaison inclinée intégrale. (5)	PRODUITS des chiffres de (5) par les facteurs. (6)	DEMI-ORDONNÉES de la flottaison inclinée intégrale. (7)	PRODUITS des chiffres de (7) par les facteurs. (8)	DEMI-ORDONNÉES de la flottaison inclinée intégrale. (9)	PRODUITS des chiffres de (9) par les facteurs. (10)
$S_1 =$	$\Sigma_1 =$	$S_0 =$	$\Sigma_0 =$	$S_{-1} =$	$\Sigma_{-1} =$
$S'_1 =$	$\Sigma'_1 =$	$S'_0 =$	$\Sigma'_0 =$	$S'_{-1} =$	$\Sigma'_{-1} =$
$S_1 + S'_1 = A_1 =$	$\Sigma_1 - \Sigma'_1 = B_1 =$	$S_0 + S'_0 = A_0 =$	$\Sigma_0 - \Sigma'_0 = B_0 =$	$S_{-1} + S'_{-1} = A_{-1} =$	$\Sigma_{-1} - \Sigma'_{-1} = B_{-1} =$
$V_1 = 2\lambda A_1 =$	$M_1 = 2\lambda^2 B_1 =$	$V_0 = 2\lambda A_0 =$	$M_0 = 2\lambda^2 B_0 =$	$V_{-1} = 2\lambda A_{-1} =$	$M_{-1} = 2\lambda^2 B_{-1} =$
$\xi_1 = \frac{M_1}{V_1} =$		$\xi_0 = \frac{M_0}{V_0} =$		$\xi_{-1} = \frac{M_{-1}}{V_{-1}} =$	

CALCUL DES CARÈNES INCLINÉES LONGITUDINALEMENT
(MÉTHODE DU VERTICAL INTÉGRAL).

Calculs relatifs aux carènes isoclines pour l'inclinaison α.

TABLEAU II.

NUMÉROS des flottaisons inclinées.	VOLUMES V_k. (1)	$\Sigma_{-2}^{n}(V_k)$. (2)	$h'\Sigma_{-2}^{n}(V_k)$. (3)	$Z_k = \frac{(3)}{(1)}$. (4)	$Z_k \sin\alpha$. (5)	$\frac{1}{\cos\alpha}\xi_k$. (6)	$\eta_k = (6)-(5)$ (7)
3							
2							
1							
0							
−1							
−2 (¹)							

(¹) Les courbes sont supposées aboutir sur la P*p*M à la hauteur de la flottaison — 2.

Données.
- Équidistance oblique, mesurée sur la P*p*M, des flottaisons inclinées $h' =$
- Valeur de $\sin\alpha =$
- Valeur de $\frac{1}{\cos\alpha} =$

Z_k est la distance oblique, mesurée sur la P*p*M, du centre de la carène V_k à la flottaison inclinée k.

η_k est la distance oblique à la P*p*M, mesurée sur la flottaison inclinée k à partir de la P*p*M, de la projection sur cette flottaison du centre de la carène V_k.

Les quantités V_k et ξ_k sont relevées sur le Tableau I.

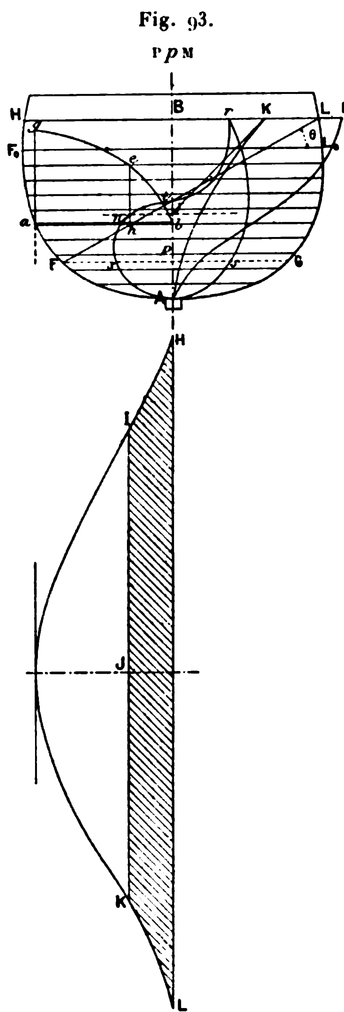
61. Méthode Rossin. — Inclinaisons transversales.

La méthode imaginée par Rossin, ancien ingénieur de la Marine, pour le calcul des carènes inclinées transversalement, est l'analogue de la méthode du vertical intégral pour les inclinaisons longitudinales. Elle permet aussi de trouver les éléments géométriques de la carène inclinée par le seul secours du réseau des sections droites tracées sur le plan des formes.

Considérons une carène inclinée définie par la profondeur p du fond de carène au milieu et par l'angle d'inclinaison θ, mesuré dans le plan transversal. Représentons le maître couple et les traces des lignes d'eau droites. Pour chaque demi-ligne d'eau de bâbord et tribord, située dans la région comprise entre FG et

LH (*fig.* 93), construisons la courbe intégrale qui donne l'aire comprise entre son axe et une corde parallèle à cet axe, telle que HIJKL en projection horizontale. Pour l'une d'elles, *ab* par exemple, la courbe intégrale sera *beg*, et son ordonnée extrême *ag* représentera la surface entière de la demi-ligne d'eau. Ces graphiques pourraient être avantageusement remplacés, au point de vue de l'encombrement, par des sortes d'échelles, graduées suivant l'aire, et portées en *ba* sur la ligne d'eau elle-même.

Fig. 93.

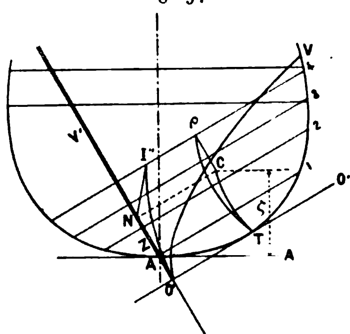


Nous sommes maintenant en mesure de tracer la courbe des aires des lignes d'eau droites de la carène inclinée (p, θ). En effet, depuis le fond de carène jusqu'à la flottaison FG, cette courbe est commune avec celle A*s* des aires des demi-flottaisons droites entières, que nous tracerons symétriquement des deux côtés. Au-dessus de FG, il faut porter horizontalement, à partir de l'axe P*p*M du vertical, des longueurs *bn*, égales aux ordonnées *he*, représentant les aires utiles de ces lignes d'eau. On obtient ainsi une courbe fermée se terminant en *r* sur l'horizontale LH, et dont la largeur sur chaque ligne d'eau droite représente l'aire utile de cette ligne d'eau. Cette courbe cesse évidemment d'être symétrique au-dessus de FG. Traçons (*fig.* 93) l'intégrale AI de cette courbe, en considérant la surface comme positive des deux côtés de l'axe P*p*M. L'ordonnée extrême BI de cette intégrale donnera le volume $V_{p\theta}$ de la carène inclinée (p, θ). Si maintenant on construit l'intégrale seconde AK et qu'on lui mène une tangente en K, le point *J*, où

cette tangente coupera l'axe PpM, fournira la hauteur du centre de gravité de la courbe A$sntrs$A, et par suite la hauteur $\zeta_{p\theta}$ du centre de la carène inclinée au-dessus du fond de carène et perpendiculairement au réseau des sections droites.

Reste à déterminer une seconde coordonnée pour le centre de la carène inclinée projeté sur le maître couple. Cette coordonnée sera la distance $Z_{p\theta}$ du centre C à la tangente au contour du maître couple parallèle à la flottaison inclinée. On détermine cet élément par une marche détournée, comme on a fait dans la méthode du vertical intégral pour les carènes inclinées longitudinalement. Pour cela, effectuons les opérations indiquées ci-dessus pour une série de pantocarènes isoclines d'inclinaison θ. Cela nous donnera le moyen de tracer la courbe O′V (*fig.* 94) des volumes des carènes isoclines θ; ou encore, une échelle graduée des volumes O′V′. Le pied commun O′ de cette courbe et de cette échelle est sur la tangente inclinée de θ, au contour apparent du maître couple. Cette courbe O′V est l'intégrale première d'une courbe Σ (qu'il est inutile de tracer), donnant les aires des sections ou flottaisons inclinées successives 1, 2, 3, ... Si donc nous traçons la courbe intégrale de O′V, c'est-à-dire l'intégrale seconde O′I″ de Σ, et qu'à son intersection avec une flottaison inclinée quelconque (4 par exemple) nous lui menions une tangente I″N, cette tangente coupera l'échelle O′V′ en un point N qui fournira la distance O′N = $Z_{p\theta}$ du centre de la carène inclinée limitée à la flottaison 4, à la flottaison initiale inclinée de θ, O′O′. Connaissant les $Z_{p\theta}$ des carènes isoclines, nous pourrons, puisque nous avons déjà déterminé les valeurs des $\zeta_{p\theta}$ au-dessus de AA, placer les centres de carène C en véritable position de projection sur le maître couple. Chacun de ces points C est ensuite projeté sur la flottaison inclinée correspondante en ρ, puis on trace les deux isoclines ρ et C, qui, toutes deux, doivent évidemment passer par le point de tangence T.

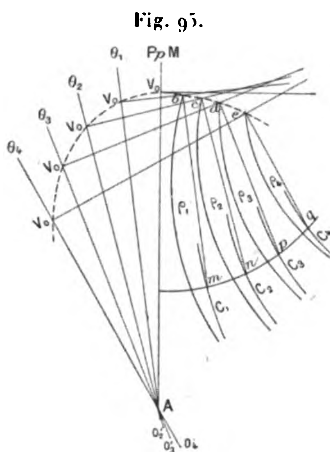
Fig. 94.



Une fois les isoclines θ tracées, on passe aux calculs d'autres

inclinaisons θ', θ'', ..., et l'on superpose ensuite tous les résultats sur un seul graphique, qui permettra les interpolations par rapport à p et à θ. Ainsi, menons par A (*fig.* 95) une série de droites inclinées sur l'axe PpM des angles θ_1, θ_2, θ_3, ..., et reproduisons sur chacune d'elles, à partir d'un point O′ convenablement placé, l'échelle O′V′ correspondante de la *fig.* 94. Reportons de même sur ce graphique les isoclines C et ρ obtenues. Si nous voulons étudier les isocarènes d'un volume quelconque V_0, nous marquerons sur chaque échelle le point V_0, et par ce point nous mènerons la flottaison correspondante. Les intersections de ces flottaisons successives avec les isoclines ρ donneront la courbe *bcde* des projections des centres des isocarènes V_0 sur leurs flottaisons respectives. Enfin, en menant par ces intersections des parallèles aux échelles jusqu'aux isoclines C correspondantes, nous aurons en vraie position la série ou courbe *mnpq* des projections sur le maître couple des centres des isocarènes de volume V_0.

Fig. 95.



Cette méthode fort ingénieuse est tombée en désuétude à cause de la longueur des calculs et tracés qu'elle implique. Pour cinq flottaisons parallèles et pour des angles de 10°, 20°, 30° et 40°, on est conduit, par la méthode de Rossin, au tracé de 82 courbes.

62. Méthode de M. Clauzel. — Inclinaisons transversales.

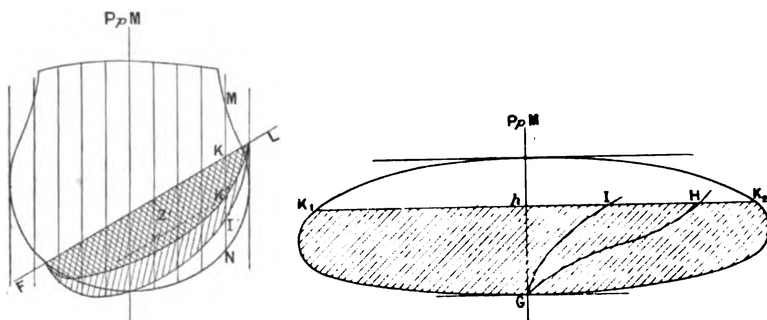
M. Clauzel, ingénieur de la Marine, eut l'idée de transformer la méthode Rossin en opérant, non plus sur les portions utiles ou immergées des sections droites du plan des formes, mais sur les portions utiles des sections longitudinales de ce plan.

Soit une section longitudinale MN. Évaluons l'aire de la portion immergée K_1GK_2 et traçons l'intégrale première, GH, et l'intégrale seconde, GI, de cette aire (*fig.* 96). Si nous portons l'aire hH de la section longitudinale utile sur la trace de cette

section en KK′, à partir de la flottaison inclinée, la courbe en coordonnées obliques des points K′ fournira par son aire le volume de la carène (p, θ).

L'ordonnée hI, qui représente le moment de l'aire de la section longitudinale par rapport à la ligne K_1K_2, peut de même être

Fig. 96.



portée en KI′ sur la trace MN, et la courbe en coordonnées obliques des points I′ donnera par son aire le moment du volume de la carène par rapport au plan de la flottaison inclinée. En divisant l'aire I′ par l'aire K′, on obtient donc la distance oblique du centre de la carène $(p\theta)$ à la flottaison inclinée, soit $Z'_{p\theta}$, qui définit une droite parallèle à FL sur laquelle doit se trouver d'abord le centre de carène en projection sur le maître couple. Pour avoir une seconde coordonnée de cette projection, reprenons (*fig.* 97) la courbe K′ et traçons sa courbe intégrale PQ en coordonnées obliques, en prenant FL pour axe des abscisses et en menant les ordonnées parallèlement à l'axe PpM du vertical. Traçons ensuite son intégrale seconde PU. On sait qu'en menant en U la tangente à cette intégrale seconde jusqu'à la rencontre avec l'axe des abscisses en V, on obtient le pied d'une ordonnée VW contenant le centre de gravité de la courbe K′, c'est-à-dire le centre de carène cherché en projection sur le maître couple. On a donc une seconde coordonnée $Y'_{p\theta}$ (distance oblique du centre de carène à l'axe PpM) qui avec $Z'_{p\theta}$ permet de placer en vraie position le centre de carène sur le maître couple.

On pourrait, pour avoir la première coordonnée $Z'_{p\theta}$, se dispenser de construire pour chaque portion utile de section longitudinale l'intégrale seconde GI (*fig.* 96). On n'aurait qu'à porter

le volume de carène FQ (*fig.* 97) sur la flottaison inclinée FL correspondante, et ainsi de suite pour les autres carènes isoclines, d'où une courbe de points Q (*fig.* 98) qui n'est autre que l'intégrale première d'une courbe des aires des flottaisons inclinées.

En menant dès lors la courbe R intégrale de Q, et, à cette

Fig. 97.

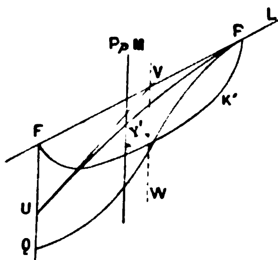
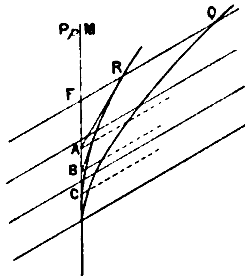


Fig. 98.



courbe R, les tangentes aux différentes flottaisons isoclines, on aura des points d'intersection A, B, C, ... de ces tangentes avec l'axe PpM qui définiront les différentes valeurs de $Z'_{p\theta}$.

La méthode de M. Clauzel ne s'emploie pas en général dans la Marine de l'État, parce qu'elle exigerait au préalable de compléter le réseau des sections longitudinales sur le plan de formes, alors qu'il est d'usage, comme nous l'avons vu, de ne tracer qu'une partie de ce réseau.

63. Méthode par le vertical intégral. — Inclinaisons transversales.

Le vertical intégral peut fournir les éléments d'une carène inclinée, aussi bien pour les inclinaisons transversales que pour les inclinaisons longitudinales. Soient, en effet, un demi-couple quelconque de contour CC (*fig.* 99), et sa courbe intégrale (ou demi-couple intégral) II. Représentons la trace sur ce couple de la flottaison inclinée FL. Les deux côtés du contour CC étant symétriques par rapport à l'axe P*p*M, si le côté tribord est coupé suivant FL, le côté bâbord sera coupé suivant FL′ également incliné sur l'horizontale, mais en sens inverse.

Or l'aire du couple limité à FL est égale à l'aire du couple limité à AL, moins le triangle FAL, c'est-à-dire moins la moitié

du rectangle FALB. Donc cette aire Σ s'obtiendra en menant la tangente en E à la courbe intégrale

$$\Sigma = \mathrm{FP} - \tfrac{1}{2}\,\mathrm{TP} = \frac{\mathrm{FP} + \mathrm{FT}}{2}.$$

Fig. 99.

De même, pour l'aire Σ' du couple limité à FL′, on mènera la tangente en H à la courbe intégrale, et l'on aura

$$\Sigma' = \mathrm{FQ} + \tfrac{1}{2}\,\mathrm{QR} = \frac{\mathrm{FQ} + \mathrm{FR}}{2},$$

et pour l'aire du couple entier limité à la flottaison inclinée

$$\Sigma + \Sigma' = \tfrac{1}{2}(\mathrm{FP} + \mathrm{FQ} + \mathrm{FR} + \mathrm{FT}).$$

Mais cette méthode ne donne pas facilement les coordonnées du centre de carène autres que la coordonnée $\xi_{p\theta}$ (distance de ce centre au maître couple), laquelle ne sert pas pour le but qu'on a en vue. On ne l'emploie donc pas et nous ne la citons que pour mémoire.

CHAPITRE IX.

APPLICATION AU NAVIRE DES MÉTHODES DE CALCUL POUR LES CARÈNES INCLINÉES.

MÉTHODES EMPLOYANT LES ONGLETS IMMERGÉS OU ÉMERGÉS, C'EST-A-DIRE LES ORDONNÉES DES FLOTTAISONS INCLINÉES.

64. Méthode Reech-Risbec. — Inclinaisons transversales.

Dans les méthodes de calcul que nous avons déjà passées en revue, on calculait des groupes successifs de carènes isoclines; dans celles qui vont suivre, on calculera au contraire des groupes successifs de carènes isobathes, en employant, pour chaque groupe ou *station*, la considération des volumes et moments des onglets immergés ou émergés par lesquels on passe d'une flottaison à la suivante.

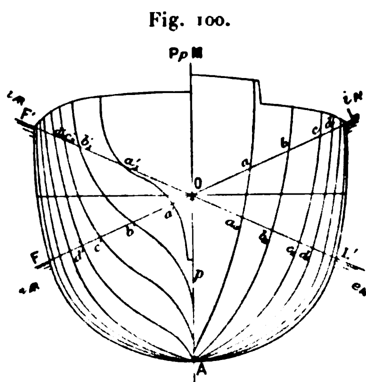
C'est Reech qui introduisit en France la considération des onglets comme base d'une méthode pratique de calculs pour les carènes inclinées; il donna le principe de sa méthode dans son Cours d'Architecture navale à l'École du Génie maritime et dans une Note insérée au *Mémorial du Génie maritime* (3e livraison, 1864). M. Risbec, ingénieur de la Marine, en facilita l'emploi en lui appliquant la méthode générale d'interpolation graphique que nous avons décrite au Chapitre VI et en la dotant, en 1870, de Tableaux de calculs commodes et complets.

Dans la méthode primitive, telle qu'elle a été décrite dans le *Mémorial*, en 1864, on cherchait les éléments suivants : le volume de carène $V_{p\theta}$; les coordonnées de la projection du centre de carène sur le maître couple, $Y_{p\theta}$, distance au longitudinal du plan de formes, $Z_{p\theta}$ distance à la flottaison droite isobathe de la station considérée; enfin $r_{p\theta}$ rayon métacentrique correspondant à la carène $V_{p\theta}$; les Tableaux de M. Risbec ne contenaient d'in-

dication de calculs que pour ces fonctions. Mais la même méthode, par une extension facile à imaginer, permet d'obtenir la troisième coordonnée du centre de carène $X_{p\theta}$, distance au plan du maître couple; et $R_{p\theta}$, grand rayon métacentrique de la carène $V_{p\theta}$. Ce sont les Tableaux, complétés par une quatrième page (que l'on pourra ou non remplir suivant le but à atteindre), que nous donnons à la fin du présent paragraphe.

Soit un groupe ou *station* de carènes isobathes, défini par la profondeur de carène p. Pour effectuer les calculs, on commencera par tracer sur le vertical du plan des formes les différentes flottaisons inclinées FL passant par le même point O (*fig.* 100), qui caractérise la station, puis toutes les flottaisons F′L′ symétriques des premières par rapport à l'axe PpM. Sur chaque flottaison FL et sa symétrique F′L′, on relèvera les ordonnées Oa, Ob, Oc situées à l'avant du côté de l'immersion et Oa'_1, Ob'_1, Oc'_1 situées à l'arrière et du côté de l'immersion; puis Oa_1, Ob_1, Oc_1 et Oa', Ob', Oc', situées à l'avant et à l'arrière du côté de l'émersion. Nous désignerons les premières par i_n et les secondes par e_n pour la $n^{\text{ième}}$ flottaison inclinée. De même que pour les flottaisons droites, il faut faire ici la correction des aboutissements des lignes d'eau inclinées, ce qui est facilité par le fait que toutes les lignes d'une même station aboutissent au même point sur leur axe projeté en O. Toutes ces lignes d'eau auront donc le même facteur de correction $\alpha = \frac{\beta}{2}$ (n° 45). Nous n'aurons d'ailleurs pas à nous inquiéter des aboutissements de couples, car les stations dont on fait usage sont toutes en général sensiblement au-dessus du fond de carène.

Fig. 100.



Pour les grandes inclinaisons, la flottaison inclinée peut rencontrer, non plus la muraille, mais la surface d'un pont. On pourra alors, sur le vertical, représenter la ligne d'intersection de chaque couple avec la surface du pont et prendre, pour limiter

les ordonnées inclinées, les points où la flottaison inclinée rencontre successivement ces lignes d'intersection. Mais, comme on n'est pas dans l'habitude de représenter sur le vertical les couples du pont supérieur, pour éviter des tracés longs et minutieux, on limite en général les ordonnées inclinées à l'intersection en M (*fig.* 101) avec le livet horizontal, ce qui est suffisamment approché, et l'on prend OM, au lieu de ON, en négligeant le bouge du pont et l'épaisseur du bordé du pont.

Fig. 101.

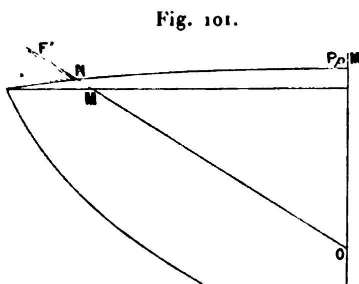
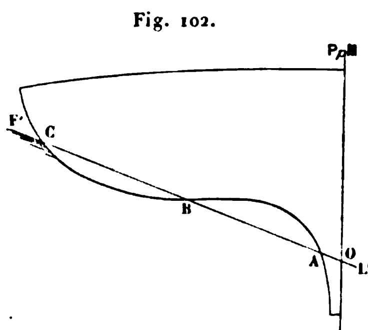


Fig. 102.



Dans certains navires à formes contournées, la flottaison inclinée F′L′ (*fig.* 102) coupe quelques couples en plusieurs points A, B, C. On doit alors prendre pour ordonnée sur ce couple OC — OB + OA, et pour la puissance k de l'ordonnée

$$\overline{OC}^k - \overline{OB}^k + \overline{OA}^k.$$

Les Tableaux de calculs sont disposés, pour la méthode Reech-Risbec, de la façon suivante :

Chaque ensemble de deux feuilles doubles, tel que celui des pages 171 à 174, est relatif à une station. Le nombre des stations est au moins de quatre et, en général, de cinq. Il y aura donc d'ordinaire cinq feuilles doubles à remplir pour un navire donné. Sur chacune d'elles, le Tableau I reproduit la légende des dimensions principales du navire, et le Tableau II, les données spéciales à la station considérée et les éléments de la carène droite appartenant à cette station, pris dans le Tableau des carènes droites.

Le Tableau III est celui où s'inscrivent les résultats principaux que cherchait Reech dans la méthode primitive, le Tableau IV fournit les résultats complémentaires.

Dans chaque station on espace, en général, en France, les incli-

naisons de 10° en 10° jusqu'à 40°, et chaque inclinaison correspond à une travée des Tableaux III et IV.

Tableau III. — A la gauche de ce Tableau, se trouve une première colonne indépendante indiquant seulement le numérotage des couples.

La première travée est relative à la flottaison droite de la station; elle comprend trois colonnes seulement, dont une pour les demi-ordonnées de la flottaison, une pour leurs carrés, et une pour leurs cubes. Dans les autres travées, les demi-ordonnées de tribord n'étant plus égales à celles de bâbord, chacune de ces colonnes sera dédoublée, d'où un nombre de six colonnes par travée. Dans les colonnes des ordonnées on n'inscrit que la moitié de la première et de la dernière ordonnée; dans les colonnes des carrés et des cubes on n'inscrit que la moitié du carré et du cube de la première et de la dernière ordonnée.

On fait ensuite les sommes $\mathfrak{I}_n$, $\mathcal{E}_n$, $\mathfrak{I}_n^2$, $\mathcal{E}_n^2$, $\mathfrak{I}_n^3$, $\mathcal{E}_n^3$ de ces six colonnes, et, au moyen de ces sommes, on calcule :

1° L'aire A_n de la flottaison inclinée,

$$A_n = \lambda \sum_0^{20} (i_n + e_n) = \lambda(\mathfrak{I}_n + \mathcal{E}_n) = \lambda s_n,$$

en appelant s_n la somme $\mathfrak{I}_n + \mathcal{E}_n$.

2° Le moment B_n, par rapport à l'axe O, de l'aire A_n; en considérant les surfaces comme positives des deux côtés de l'axe,

$$B_n = \tfrac{1}{2}\lambda \sum_0^{20} (i_n^2 - e_n^2) = \frac{\lambda}{2}(\mathfrak{I}_n^2 - \mathcal{E}_n^2) = \frac{\lambda}{2}\delta_n,$$

en appelant δ_n la différence $\mathfrak{I}_n^2 - \mathcal{E}_n^2$; B_n sera positif si $\mathfrak{I}_n^2$ est plus grand que $\mathcal{E}_n^2$, c'est-à-dire que le moment B_n a le signe de δ_n.

3° Le moment d'inertie C_n de l'aire A_n par rapport à l'axe O,

$$C_n = \tfrac{1}{3}\lambda \sum_0^{20} (i_n^3 + e_n^3) = \frac{\lambda}{3}(\mathfrak{I}_n^3 + \mathcal{E}_n^3) = \frac{\lambda}{3}\sigma_n,$$

en appelant σ_n la somme $\mathfrak{I}_n^3 + \mathcal{E}_n^3$.

Cherchons maintenant le volume V_n de la carène limitée par la $n^{\text{ième}}$ flottaison oblique (inclinée de l'angle $\Theta_n = n \times 10°$). Ce volume V_n se compose : 1° du volume V_0 de la carène droite de la même station, volume donné dans le Tableau II; 2° du volume

additif, $+v_i$, de l'onglet immergé; 3° du volume soustractif, $-v_e$, de l'onglet émergé,

$$V_n = V_0 + v_i - v_e.$$

Or on a vu (n° 4) que

$$v_i = \int_0^A dx \int_0^{\Theta_n} \frac{\rho^2}{2}\, d\theta = \int_0^{\Theta_n} d\theta \int_0^A \frac{\rho^2}{2}\, dx = \int_0^{\Theta_n} d\theta\, \frac{\lambda}{2}(\mathfrak{I}_k^2)$$

et

$$v_e = \int_0^A dx \int_0^{\Theta_n} \frac{\rho^2}{2}\, d\theta = \int_0^{\Theta_n} d\theta \int_0^A \frac{\rho^2}{2}\, dx = \int_0^{\Theta_n} d\theta\, \frac{\lambda}{2}(\mathfrak{E}_k^2),$$

d'où

$$v_i - v_e = \int_0^{\Theta_n} d\theta\, \frac{\lambda}{2}(\mathfrak{I}_k^2 - \mathfrak{E}_k^2) = \int_0^{\Theta_n} d\theta\, B_k$$

$$= \omega_a\left(\frac{B_0}{2} + B_1 + \ldots + B_{n-1} + \frac{B_n}{2}\right);$$

d'où enfin

$$V_n = V_0 + \omega_a\left(\frac{B_0}{2} + B_1 + \ldots + B_{n-1} + \frac{B_n}{2}\right)$$

et, en posant $\frac{\omega_a B_k}{2} = b_k$, que l'on calculera pour chaque travée de $k = 0$ à $k = n$,

$$V_n = V_0 + b_0 + 2b_1 + 2b_2 + \ldots + 2b_{n-1} + b_n;$$

d'où résulte, pour passer du volume V_n au volume suivant V_{n+1}, la formule très simple

$$V_{n+1} = V_n + b_n + b_{n+1}.$$

La constante ω_a, donnée dans le Tableau II, est égale à 0,1745, pour l'intervalle angulaire de 10° adopté généralement en France.

Connaissant V_n, nous pouvons maintenant calculer le rayon métacentrique r_n de cette carène V_n. Pour cela, nous chercherons d'abord la distance γ_n du centre de gravité de la $n^{\text{ième}}$ flottaison oblique à l'axe O; on a

$$\gamma_n = \frac{B_n}{A_n} = \frac{1}{2}\,\frac{\delta_n}{s_n}.$$

Cela fait, nous prendrons le moment d'inertie i_n de l'aire A_n, non pas par rapport à l'axe O, mais par rapport à un axe parallèle

passant par son centre de gravité

$$i_n = C_n - A_n \gamma_n^2 = C_n - \frac{B_n^2}{A_n}.$$

Nous aurons enfin

$$r_n = \frac{i_n}{V_n} = \frac{C_n - \frac{B_n^2}{A_n}}{V_n}.$$

Reste à calculer les coordonnées Y_n et Z_n.

Pour cela, nous prendrons les moments des volumes V_n d'une part, $V_0 + v_i - v_e$ de l'autre, par rapport au plan longitudinal d'abord, puis par rapport au plan de la flottaison droite de la station considérée.

En prenant les moments par rapport au plan longitudinal, on a

$$V_n Y_n = 0 + M(v_i) + M(v_e);$$

car ici le volume et le bras de levier sont tous deux positifs pour v_i, et tous deux négatifs pour v_e. Or nous savons (n° 4) que

$$M(v_i) = \int_0^{\Lambda} \left(\frac{i^3}{3}\,dx\right) \int_0^{\Theta_n} \cos\theta\, d\theta = \int_0^{\Theta_n} \frac{\lambda}{3} \mathfrak{I}_k^3 \cos\theta_k\, d\theta$$

et que

$$M(v_e) = \int_0^{\Lambda} \left(\frac{e^3}{3}\,dx\right) \int_0^{\Theta_n} \cos\theta\, d\theta = \int_0^{\Theta_n} \frac{\lambda}{3} \mathcal{E}_k^3 \cos\theta_k\, d\theta;$$

d'où

$$V_n Y_n = \int_0^{\Theta_n} \frac{\lambda}{3} (\mathfrak{I}_k^3 + \mathcal{E}_k^3) \cos\theta_k\, d\theta = \int_0^{\Theta_n} C_k \cos\theta_k\, d\theta$$

$$= \omega_a \left(\frac{C_0 \cos 0^\circ}{2} + C_1 \cos 10^\circ + \ldots + C_{n-1} \cos\theta_{n-1} + \frac{C_n \cos\theta_n}{2} \right)$$

ou, en posant $\frac{\omega_a C_k \cos\theta_k}{2} = f_k$, terme que l'on calculera à chaque travée,

$$V_n Y_n = f_0 + 2 f_1 + \ldots + 2 f_{n-1} + f_n.$$

De là résulte une formule simple, pour passer de la coordonnée Y_n, appartenant à la carène limitée par la $n^{\text{ième}}$ flottaison oblique, à la coordonnée Y_{n+1} de la carène suivante,

$$V_{n+1} Y_{n+1} = V_n Y_n + f_n + f_{n+1}.$$

Prenons maintenant les moments par rapport à la flottaison droite de la station pour déterminer Z_n; on aura

$$V_n Z_n = V_0 Z_0 - M(v_i) - M(v_e);$$

ici on a les signes — pour $M(v_i)$ et $M(v_e)$, parce que les bras de levier sont de signe contraire au signe des volumes v_i et v_e. Si Z_n est positif, on le portera dans le sens où est porté Z_0, c'est-à-dire vers le bas, à partir de la flottaison droite de la station considérée.

Nous avons vu d'ailleurs (n° 4) que l'on doit poser

$$M(v_i) = \int_0^A \left(\frac{i^3}{3}\,dx\right) \int_0^{\Theta_n} \sin\theta\,d\theta = \int_0^{\Theta_n} \frac{\lambda}{3} \mathfrak{I}_k^3 \sin\theta_k\,d\theta$$

et

$$M(v_e) = \int_0^A \left(\frac{e^3}{3}\,dx\right) \int_0^{\Theta_n} \sin\theta\,d\theta = \int_0^{\Theta_n} \frac{\lambda}{3} \mathcal{E}_k^3 \sin\theta_k\,d\theta;$$

d'où

$$\begin{aligned} V_n Z_n &= V_0 Z_0 - \int_0^{\Theta_n} \frac{\lambda}{3} (\mathfrak{I}_k^3 + \mathcal{E}_k^3) \sin\theta_k\,d\theta \\ &= V_0 Z_0 - \int_0^{\Theta_n} C_k \sin\theta_k\,d\theta \\ &= V_0 Z_0 - \omega_a \left(\frac{C_0 \sin 0^\circ}{2} + C_1 \sin 10^\circ + \ldots + C_{n-1} \sin\theta_{n-1} + \frac{C_n \sin\theta_n}{2} \right) \end{aligned}$$

ou, en posant $\frac{\omega_n C_k \sin\theta_k}{2} = e_k$, terme que l'on calculera à chaque travée,

$$V_n Z_n = V_0 Z_0 - (e_0 + 2e_1 + \ldots + 2e_{n-1} + e_n).$$

On tire de là la formule simple suivante, pour passer d'une flottaison oblique n à la flottaison suivante $n+1$,

$$V_{n+1} Z_{n+1} = V_n Z_n - (e_n + e_{n+1}).$$

Tableau IV. — Sur le Tableau IV se trouve tout d'abord, à gauche, une colonne indépendante où l'on inscrit les numéros des couples, lesquels auront aussi à servir de facteurs. Il n'y a pas de travée pour la flottaison droite de la station. Chaque flottaison inclinée de la station emploie une travée de cinq colonnes.

Dans la première de ces colonnes, on inscrit la somme $i_n + e_n$ des ordonnées tribord et bâbord de la $n^{\text{ième}}$ flottaison oblique prises dans le Tableau III, dont l'addition reproduit évidemment le terme s_n du Tableau précédent, qui, multiplié par λ, fournit encore la surface A_n de la flottaison oblique.

Dans la deuxième colonne, on inscrit le produit des chiffres de la première colonne par les facteurs correspondants, puis on fait la somme des chiffres de la partie N et la somme des chiffres

de la partie Æ. La différence ($\mathcal{N}$ — Æ) donne un terme δ'_n qui, multiplié par λ^2, fournit le moment F_n de la flottaison oblique par rapport à la trace du maître couple sur cette flottaison. En effet,

$$F_n = \int xy\,dx = \lambda^2 \left[\sum_0^{\mathcal{N}} k(i+e) - \sum_0^{\text{Æ}} k(i+e)\right] = \lambda^2 \delta'_n.$$

Le calcul de F_n permet de déterminer la distance Γ_n du centre de gravité de la flottaison oblique à la trace du couple milieu; car on a

$$A_n \Gamma_n = F_n, \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad \Gamma_n = \frac{F_n}{A_n}.$$

Dans la troisième colonne de la travée, nous inscrirons le produit, par les facteurs correspondants, des chiffres de la colonne précédente, et nous ferons cette fois la somme totale s'_n de toute la colonne, avant et arrière réunis. Ce terme s'_n, multiplié par λ^3, donnera le moment d'inertie E_n de la flottaison oblique par rapport à la trace du couple milieu. En effet,

$$E_n = \int x^2 y\,dx = \lambda^3 \left[\sum_0^{\mathcal{N}} k^2(i+e) + \sum_0^{\text{Æ}} k^2(i+e)\right] = \lambda^3 s'_n.$$

Dès lors, le moment d'inertie de la flottaison oblique par rapport à une parallèle à la trace du maître couple, passant par son centre de gravité, sera

$$I_n = E_n - A_n \Gamma_n^2,$$

et le grand rayon métacentrique R_n de la carène V_n

$$R_n = \frac{I_n}{V_n} = \frac{E_n - A_n \Gamma_n^2}{V_n} \quad \text{ou} \quad \frac{E_n - F_n \Gamma_n}{V_n}.$$

Reste le calcul de la coordonnée X_n du centre de la carène V_n.

Pour l'obtenir, on inscrit cette fois dans la quatrième colonne de la travée la différence des carrés des ordonnées tribord et bâbord $(i_n^2 - e_n^2)$ de la flottaison oblique pris dans le Tableau III; et, dans la cinquième et dernière colonne, le produit des chiffres de la colonne précédente par les facteurs correspondants. Pour cette dernière colonne, on additionne séparément les chiffres de l'avant et ceux de l'arrière, et l'on fait la différence δ''_n. Cette différence δ''_n, multipliée par $\frac{\lambda^2}{2}$, donne le moment-produit D_n de la flottaison

oblique par rapport aux traces, sur cette flottaison, du longitudinal et du vertical; car

$$D_n = \int xy^2\,dx = \frac{\lambda^2}{2}\Sigma k y^2 = \frac{\lambda^2}{2}\left[\Sigma k i_N^2 - \Sigma k e_N^2 - \Sigma k i_{\text{Я}}^2 + \Sigma k e_{\text{Я}}^2\right] = \frac{\lambda^2}{2}\delta''_n.$$

Prenons maintenant les moments des volumes V_n et $V_0 + v_i - v_e$ par rapport au plan du maître couple, il viendra

$$V_n X_n = V_0 X_0 + M(v_i) + M(v_e),$$

en réservant les signes de $M(v_i)$ et $M(v_e)$.

Or nous savons (n° 4) que, dans ce cas,

$$M(v_i) = \int_0^{\Theta_n} d\theta \frac{\lambda^2}{2}\sum_0^N (ki^2) - \int_0^{\Theta_n} d\theta \frac{\lambda^2}{2}\sum_0^{\text{Я}} (ki^2)$$

et

$$M(v_e) = -\int_0^{\Theta_n} d\theta \frac{\lambda^2}{2}\sum_0^N (ke^2) + \int_0^{\Theta_n} d\theta \frac{\lambda^2}{2}\sum_0^{\text{Я}} (ke^2);$$

donc

$$\begin{aligned} V_n X_n &= V_0 X_0 + \int_0^{\Theta_n} d\theta \frac{\lambda^2}{2}\left[\sum_0^N k(i^2 - e^2) - \sum_0^{\text{Я}} k(i^2 - e^2)\right] \\ &= V_0 X_0 + \int_0^{\Theta_n} d\theta \frac{\lambda^2}{2}\delta''_k \\ &= V_0 X_0 + \int_0^{\Theta_n} d\theta . D_k \end{aligned}$$

et, par suite,

$$V_n X_n = V_0 X_0 + \omega_a\left(\frac{D_0}{2} + D_1 + \ldots + D_{n-1} + \frac{D_n}{2}\right)$$

ou, en posant $\frac{\omega_a D_k}{2} = d_k$, et en calculant ce terme dans chaque travée,

$$V_n X_n = V_0 X_0 + d_0 + 2d_1 + \ldots + 2d_{n-1} + d_n;$$

d'où résulte, pour passer d'une carène à la suivante, la formule simple

$$V_{n+1} X_{n+1} = V_n X_n + d_n + d_{n+1}.$$

Ici s'arrêtent les calculs complémentaires. Nous dirons cependant que l'on pourrait en déduire les renseignements intéressants ci-après :

D'abord, le moment-produit P_n d'une flottaison oblique quelconque, par rapport à deux axes parallèles aux traces du longitu-

dinal et du maître couple, menés par son centre de gravité, dont les coordonnées γ_n et Γ_n ont été calculées. On a, en effet,

$$P_n = D_n - A_n \gamma_n \Gamma_n;$$

puis les angles α_n et $\frac{\pi}{2} + \alpha_n$, que font les axes principaux d'inertie de la flottaison oblique avec les axes ci-dessus; on a, en effet,

$$\tang 2\alpha_n = \frac{2P_n}{I_n - i_n},$$

d'où α_n.

Enfin, les valeurs des moments d'inertie principaux I'_n et i'_n de la flottaison oblique, puisque

$$i'_n = i_n \cos^2\alpha_n + I_n \sin^2\alpha_n - P_n \sin 2\alpha_n,$$
$$I'_n = i_n \sin^2\alpha_n + I_n \cos^2\alpha_n + P_n \sin 2\alpha_n.$$

Telle est la méthode Reech-Risbec, qui présente ce caractère remarquable d'effectuer tous les calculs et d'arriver aux résultats finaux sans tracé d'aucune courbe intégrale auxiliaire et avec le seul secours de lignes droites tracées sur le vertical du plan des formes.

Mais, une fois les calculs terminés par cette méthode, il reste à appliquer à toutes les fonctions dont on a des séries de valeurs, et en particulier à Z_n, Y_n, r_n, la méthode d'interpolation graphique dont l'explication a fait l'objet du Chapitre VI, de façon à déduire des résultats calculés ceux relatifs à une isocarène de volume donné V_0. On pourra finalement tracer, comme conclusion, sur une même feuille de papier, avec le même axe d'abscisses θ, les courbes isocarènes des fonctions les plus importantes, telles que Z, Y et r.

L (1)

CALCUL DES ÉLÉMENTS GÉOMÉTRIQUES

DES CARÈNES INCLINÉES TRANSVERSALEMENT.

(Méthode Reech-Risbec.)

Dimensions principales du bâtiment. TABLEAU I.

Longueur entre perpendiculaires, de l'axe du gouvernail à l'extrémité *N* de la carène (contour extérieur de l'étrave à la flottaison ou pointe de l'éperon)..	$\Lambda =$	
Longueur à la flottaison en charge (ligne d'eau n° 10 du plan des formes)..............................	$L' =$	
Longueur de la carène, de la perpendiculaire *N* à la face *R* de l'étambot *N*........................	$L =$	
Largeur extérieure de la carène au fort, situé à au-dessus ou au-dessous de la flottaison en charge.	$l =$	
Largeur extérieure maxima à la flottaison en charge.	$l' =$	
Creux sur fond de carène, au milieu, à la ligne droite des baux du pont supérieur'...............	$c =$	
Profondeur de carène, au milieu, correspondant à la flottaison en charge.......................... ..	$p =$	
Tableau de la quille et de la fausse quille au milieu.	$q =$	
Tirants d'eau en charge: à la perpendiculaire *R*...		
Tirants d'eau en charge: à la perpendiculaire *N*...		
Tirants d'eau en charge: à la perpendiculaire M...	$p + q$	
Tirants d'eau en charge: Différence.............	$\Delta =$	
Assiette prévue....................................	$\frac{\Delta}{\Lambda} =$	

Données à consulter pour les calculs de la • station. TABLEAU II.

Équidistance des sections horizontales ou lignes d'eau du plan des formes..............................	$h = \frac{p}{10} =$	-
Équidistance des sections verticales ou couples.....	$\lambda = \frac{\Delta}{20} =$	
Longueur de l'arc de 10° dans le cercle de rayon 1...	$\omega =$	0,1745
Profondeur de carène constante pour la • station.	$p' =$	
Volume de la carène limitée à la flottaison droite de la • station (sans appendices).................	$V_0 =$	
Distance au-dessous de cette flottaison droite du centre de carène correspondant.................	$Z_0 =$	
Distance en avant du couple milieu du centre de carène correspondant............................	$X_0 =$	

(1) Nom du bâtiment.

Calculs relatifs à la ° station.

NUMÉROS. des couples.	FLOTTAISON POUR 0°. ORDONNÉES $i_0 = e_0$	CARRÉS des ordonnées $i_0^2 = e_0^2$.	CUBES des ordonnées $i_0^3 = e_0^3$.	FLOTTAISON POUR 10°. ORDONNÉES (2 décimales) i_1.	e_1.	CARRÉS des ordonnées (1 décimale) i_1^2.	e_1^2.	CUBES des ordonnées (entiers) i_1^3.	e_1^3.
PP AV									
9									
8									
7									
6									
5									
4									
3									
2									
1									
PPM									
1									
2									
3									
4									
5									
6									
7									
8									
9									
PP AR									
Sommes des colonnes.	$\mathcal{J}_0 = \mathcal{E}_0$ =	»	$\mathcal{J}_0^3 = \mathcal{E}_0^3$ =	$\mathcal{J}_1 =$	$\mathcal{E}_1 =$	$\mathcal{J}_1^2 =$	$\mathcal{E}_1^2 =$	$\mathcal{J}_1^3 =$	$\mathcal{E}_1^3 =$
»	$s_0 = \mathcal{J}_0 + \mathcal{E}_0$ =	$\delta_0 = \mathcal{J}_0^2 - \mathcal{E}_0^2$ = 0	$\sigma_0 = \mathcal{J}_0^3 + \mathcal{E}_0^3$ =	$s_1 = \mathcal{J}_1 + \mathcal{E}_1$ =		$\delta_1 = \mathcal{J}_1^2 - \mathcal{E}_1^2$ =		$\sigma_1 = \mathcal{J}_1^3 + \mathcal{E}_1^3$ =	
»	$s_0 \lambda = A_0$ =	$\frac{1}{2} \delta_0 \lambda = B_0$ = 0	$\frac{1}{3} \sigma_0 \lambda = C_0$ =	$s_1 \lambda = A_1$ =		$\frac{1}{2} \delta_1 \lambda = B_1$ =		$\frac{1}{3} \sigma_1 \lambda = C_1$ =	
»	»	$\frac{1}{2} B_0 \omega = b_0$ = 0	e_0 = 0			$\frac{1}{2} B_1 \omega = b_1$ =		$\frac{1}{2} C_1 \omega \sin 10° = e_1$ =	
» »	» »	» »	$\frac{1}{2} C_0 \omega = f_0$ =			sin 10° = 0,1736 cos 10° = 0,9848		$\frac{1}{2} C_1 \omega \cos 10° = f_1$ =	

$V_0 =$
$Y_0 =$
$Z_0 =$
$r_0 =$

$V_1 =$
$Y_1 =$
$Z_1 =$
$r_1 =$

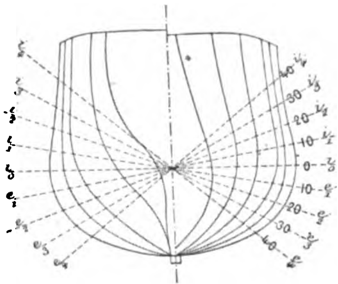
L'indice n est relatif aux éléments géométriques de la carène limitée par une flottaison incli-
La quantité b_n a le signe de la différence δ_n.
L'ordonnée Z_n est comptée normalement à la flottaison droite de la station et vers le bas.
Dans les colonnes des ordonnées, on n'inscrit que la moitié de la première et de la dernière
du cube de la première et de la dernière ordonnée.

TABLEAU III.

FLOTTAISON POUR 40°.					
ORDONNÉES (2 décimales)		CARRÉS des ordonnées (1 décimale)		CUBES des ordonnées (entiers)	
i_4.	e_4.	i_4^2.	e_4^2.	i_4^3.	e_4^3.
$\mathfrak{J}_4 =$	$\mathfrak{E}_4 =$	$\mathfrak{J}_4^2 =$	$\mathfrak{E}_4^2 =$	$\mathfrak{J}_4^3 =$	$\mathfrak{E}_4^3 =$
$s_4 = \mathfrak{J}_4 + \mathfrak{E}_4$ =		$\delta_4 = \mathfrak{J}_4^2 - \mathfrak{E}_4^2$ =		$\sigma_4 = \mathfrak{J}_4^3 - \mathfrak{E}_4^3$ =	
$s_4 \lambda = A_4$ =		$\frac{1}{2} \delta_4 \lambda = B_4$ =		$\frac{1}{3} \sigma_4 \lambda = C_4$ =	
		$\frac{1}{2} B_4 \omega = b_4$ =		$\frac{1}{3} C_4 \omega \sin 40° = e_4$ =	
		$\sin 40° = 0,6428$ $\cos 40° = 0,7660$		$\frac{1}{3} C_4 \omega \cos 40° = f_4$ =	
$V_4 =$ $Y_4 =$ $Z_4 =$ $r_4 =$					

OBSERVATIONS.

Figure type pour le relevé des ordonnées.



Formules générales à employer pour le Tableau III.

$$A_n = \int (i_n + e_n)\, dx$$
$$B_n = \tfrac{1}{2} \int (i_n^2 - e_n^2)\, dx$$
$$C_n = \tfrac{1}{3} \int (i_n^3 + e_n^3)\, dx$$
$$V_n = V_0 + \int_0^{\Theta_n} B\, d\theta$$
$$V_n Y_n = \int_0^{\Theta_n} C \cos\theta\, d\theta$$
$$V_n Z_n = V_0 Z_0 - \int_0^{\Theta_n} C \sin\theta\, d\theta$$
$$r_n = \frac{C_n - \frac{B_n^2}{A_n}}{V_n}$$

d'où

$$V_n = V_0 + b_0 + 2b_1 + 2b_2 + \ldots + b_n$$
$$V_{n+1} = V_n + b_n + b_{n+1}$$
$$V_n Y_n = f_0 + 2f_1 + 2f_2 + \ldots + f_n$$
$$V_{n+1} Y_{n+1} = V_n Y_n + f_n + f_{n+1}$$
$$V_n Z_n = V_0 Z_0 - (e_0 + 2e_1 + \ldots + e_n)$$
$$V_{n+1} Z_{n+1} = V_n Z_n - (e_n + e_{n+1})$$

née de Θ_n degrés.

ordonnée; dans les colonnes des carrés et des cubes, on n'inscrit que la moitié du carré et

Calculs relatifs à la ° station.

TABLEAU IV.

NUMÉROS des couples et facteurs.	FLOTTAISON POUR 10°					FLOTTAISON POUR 40°.					OBSERVATIONS.
	i_1+e_1.	PRODUITS (1)×(2).	PRODUITS (1)×(3).	$i_1^2-e_1^2$.	PRODUITS (1)×(5).	i_4+e_4.	PRODUITS (1)×(17).	PRODUITS (1)×(18).	$i_4^2-e_4^2$.	PRODUITS (1)×(20).	
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(17)	(18)	(19)	(20)	(21)	
10 N											
9											
8											
7											
6											
5											
4											
3											
2											
1											
0 M		Somme N =	»	»	Somme N =		Somme N =	»	»	Somme N =	
1											
2											
3											
4											
5											
6											
7											
8											
9											
10 R											
	Somme $s_1=$ $\lambda s_1 = A_1$ $=$	Somme R = diff. N-R	Somme $s'_1=$	» » »	Somme R = diff. N-R	Somme $s_4=$ $\lambda s_4 = A_4$ $=$	Somme R = diff. N-R	Somme $s'_4=$	» » »	Somme R = diff. N-R	
	$\Gamma_1 = \frac{F_1}{A_1}$ $=$	$\delta'_1=$ $\lambda^2\delta'_1=F_1$ $=$	$E_1=\lambda^2 s'_1$ $=$	$\delta''_1=$ $D_1=\frac{1}{2}\lambda^2\delta''_1=$ $d_1=\frac{1}{2}\omega D_1=$ $X_1=\frac{V_0X_0+d_1}{V_1}$ $=$		$\Gamma_4 = \frac{E_4}{A_4}$ $=$	$\delta'_4=$ $\lambda^2\delta'_4=F_4$ $=$	$E_4=\lambda^2 s'_4$ $=$	$\delta''_4=$ $D_4=\frac{1}{2}\lambda^2\delta''_4=$ $d_4=\frac{1}{2}\omega D_4=$ $X_4=\frac{V_3X_3+d_3+d_4}{V_4}$ $=$		
	$R_1=\frac{E_1-A_1\Gamma_1^2}{V_1}=$					$R_4=\frac{E_4-A_4\Gamma_4^2}{V_4}=$					

OBSERVATIONS.

Formules générales à employer pour le Tableau IV.

$D_n=\iint xy_n\,dx\,dy$

$E_n=\int x^2y_n\,dx$

$F_n=\int xy_n\,dx$

$V_nX_n=V_0X_0+\int_0^{\Theta_n} D\,d\theta$

$R_n=\frac{E_n-\frac{F_n^2}{A_n}}{V_n}$

d'où

$V_nX_n=V_0X_0+(d_0+2d_1+\ldots+d_n)$

$V_{n+1}X_{n+1}=V_nX_n+d_n+d_{n+1}$

65. Méthode de Barnes. Inclinaisons transversales.

En Angleterre, on a eu recours, plus tôt qu'en France, à la considération des onglets pour calculer, par stations successives, les carènes inclinées.

Seulement, pour définir la position du centre d'une carène quelconque, on fait généralement usage, en ce pays, de coordonnées différentes de celles adoptées par Reech.

Au lieu des distances Y et Z à deux plans, qui pour chaque station restent invariables, on considère : la distance φ à un plan variable perpendiculaire à la flottaison oblique et passant par le centre fixe C_0 de la carène droite de la station; et la distance ψ à un plan parallèle à la flottaison oblique et passant par le même point fixe C_0. La coordonnée φ, associée à l'angle correspondant θ, n'est autre que le rayon vecteur d'une courbe qui donnerait, en coordonnées polaires par rapport au pôle fixe C_0, le bras de levier de la poussée sur une carène variant d'après une certaine loi.

Dès 1796, le physicien anglais Atwood avait indiqué la formule du moment d'un onglet par rapport à un plan perpendiculaire au feuillet extrême et en avait déduit la coordonnée φ du centre d'une carène inclinée. Moseley, en 1850, avait donné l'expression de ψ d'après la formule du moment d'un onglet par rapport au feuillet extrême. Enfin, en 1861, Barnes associa les formules d'Atwood et de Moseley et décrivit, dans les *Transactions* des *Naval Architects* (Vol. II, p. 163; 1861), une méthode basée sur le calcul des coordonnées isobathes φ_n et ψ_n pour les carènes d'une même station, où il arrive, non plus par interpolations, mais par des calculs rapides et aussi approchés que tous les calculs de ce genre, à trouver les valeurs successives des coordonnées isocarènes, $\varphi_{0,n}$ et $\psi_{0,n}$, des centres des carènes ayant une inclinaison Θ_n variable, mais un volume constant V_0, égal à celui de la carène droite initiale.

Cette méthode, très expéditive quand on n'a en vue que les isocarènes d'un ou de deux volumes donnés, est en usage dans les bureaux de l'Amirauté anglaise; mais les Tableaux qu'on y emploie, et qui ont été décrits en 1871 par MM. White et John dans les *Transactions* des *Naval Architects* (Vol. XII, p. 77; 1871), sont compliqués par l'adoption, pour les intégrations, de la règle

de Simpson. Dans l'exemple que nous en donnons à la fin du présent paragraphe, nous les avons simplifiés en substituant à cette règle celle des trapèzes. Voici la description de ces Tableaux :

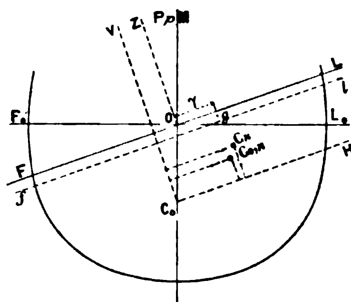
Le Tableau I est une reproduction de la légende des dimensions principales du bâtiment; le Tableau II contient les données à consulter pour les calculs de la station considérée, et, en particulier, le volume de la carène droite de cette station, volume pris directement dans les Tableaux de calculs des carènes droites.

Les calculs proprement dits font l'objet des Tableaux III et IV.

Le Tableau III, relatif au calcul des volumes V_n des carènes isobathes de la station, et des rayons métacentriques $r_{0,n}$ isocarènes pour le volume V_0, est presque entièrement semblable au Tableau III de la méthode Reech-Risbec, auquel nous renverrons pour son explication. Les seules différences sont qu'il ne renferme pas les calculs des termes e_n et f_n nécessaires à la recherche de Y_n et Z_n et que, d'autre part, il renferme l'indication des différences $V_n - V_0 = u_n$ des volumes V_n des carènes isobathes inclinées avec le volume V_0 de la carène droite de la station.

Le Tableau IV, relatif au calcul des coordonnées isocarènes $\varphi_{0,n}$ et $\psi_{0,n}$, est spécial à la méthode Barnes.

Fig. 103.



Calculons d'abord les coordonnées φ_n et ψ_n isobathes. Pour cela, nous prendrons les moments par rapport aux plans C_0V et C_0H (*fig.* 103) des volumes V_n et $V_0 + v_i - v_e$.

Prenant les moments par rapport à C_0V, il vient

$$V_n \varphi_n = M_{C_0V}(v_i) + M_{C_0V}(v_e).$$

Or les moments des volumes d'onglets v_i et v_e par rapport au

plan C_0V sont égaux aux moments des mêmes volumes par rapport au plan OZ, perpendiculaire au feuillet extrême, augmentés des moments de ces mêmes volumes, supposés concentrés en O, par rapport au plan C_0V. Mais on sait (nº 4) que les moments par rapport à OZ ont pour expression

$$\int_0^{\Theta_n} C_k \cos(\theta_n - \theta_k)\, d\theta.$$

Donc

$$(1) \qquad V_n\varphi_n = u_n Z_0 \sin\theta_n + \int_0^{\Theta_n} C_k \sin(\theta_n - \theta_k)\, d\theta,$$

en appelant u_n la différence des volumes $v_i - v_e = V_n - V_0$.

En prenant les moments par rapport à C_0H, on arriverait pour ψ_n à la formule analogue

$$(2) \qquad V_n\psi_n = - u_n Z_0 \cos\theta_n + \int_0^{\Theta_n} C_k \sin(\theta_n - \theta_k)\, d\theta.$$

Pour passer de là aux coordonnées isocarènes $\varphi_{0,n}$ et $\psi_{0,n}$, Barnes admet que, en raison de la faible valeur du volume $V_n - V_0 = u_n$, la tranche, comprise entre la flottaison isobathe FL et la flottaison isocarène *fl* de même inclinaison θ_n, est cylindrique. Dès lors, l'épaisseur ε_n de cette tranche est égale à $\frac{u_n}{A_n}$, A_n représentant l'aire de la flottaison FL fournie par le Tableau III.

Le centre de gravité g de la petite tranche cylindrique est donc à la distance $\frac{\varepsilon_n}{2} = \frac{u_n}{2A_n}$ de FL et à la distance $\gamma_n = \frac{B_n}{A_n}$ du plan OZ, γ_n étant la distance à ce plan du centre de gravité de la flottaison FL.

Prenons maintenant les moments par rapport aux plans C_0V et C_0H des volumes V_n d'une part et $V_0 + u_n$ (tranche), d'autre part. On aura, pour le moment par rapport à C_0V,

$$\begin{aligned} V_n\varphi_n &= V_0\varphi_{0,n} + M_{C_0V}(u_n) \\ &= V_0\varphi_{0,n} + M_{OZ}(u_n) + M_{C_0V}(u_n \text{ appliqué en O}) \\ &= V_0\varphi_{0,n} + u_n\gamma_n + u_n Z_0 \sin\theta_n. \end{aligned}$$

Remplaçons $V_n \varphi_n$ par sa valeur (1) : il restera

$$V_0 \varphi_{0,n} + u_n \gamma_n = \int_0^{\Theta_n} C_k \cos(\Theta_n - \theta_k)\, d\theta$$

ou

$$(3) \qquad V_0 \varphi_{0,n} = \int_0^{\Theta_n} C_k \cos(\Theta_n - \theta_k)\, d\theta - u_n \frac{B_n}{A_n}.$$

Prenons ensuite les moments par rapport à C_0H des mêmes volumes V_n et $V_0 + u_n$,

$$\begin{aligned} V_n \psi_n &= V_0 \psi_{0,n} + M_{C_0H}(u_n) \\ &= V_0 \psi_{0,n} + M_{FL}(u_n) + M_{C_0H}(u_n \text{ appliqué sur FL}) \\ &= V_0 \psi_{0,n} + u_n \frac{\varepsilon_n}{2} - u_n Z_0 \cos\Theta_n ; \end{aligned}$$

d'où

$$V_0 \psi_{0,n} + u_n \frac{u_n}{2 A_n} = \int_0^{\Theta_n} C_k \sin(\Theta_n - \theta_k)\, d\theta$$

ou

$$(4) \qquad V_0 \psi_{0,n} = \int_0^{\Theta_n} C_k \sin(\Theta_n - \theta_k)\, d\theta - \frac{1}{2} \frac{u_n^2}{A_n}.$$

Les formules (3) et (4) sont celles que l'on calcule dans le Tableau IV en employant pour les intégrations la règle des trapèzes

$$\int_0^{\Theta_n} C_k \cos(\Theta_n - \theta_k)\, d\theta = \omega_a \sum_0^n C_k \cos(\Theta_n - \theta_k),$$

$$\int_0^{\Theta_n} C_k \sin(\Theta_n - \theta_k)\, d\theta = \omega_a \sum_0^n C_k \sin(\Theta_n - \theta_k).$$

Le détail des calculs successifs est d'ailleurs expliqué dans la colonne *Observations* du Tableau III.

Il va sans dire qu'on pourrait par la même méthode calculer les coordonnées isobathes X_n et isocarènes $X_{0,n}$. On aurait

$$V_n X_n = V_0 X_{0,n} + M(u_n) = V_0 X_{0,n} + u_n \Gamma_n$$

et

$$V_n X_n = V_0 X_0 + \int_0^{\Theta} D_k\, d\theta ;$$

d'où

$$V_0 X_{0,n} = V_0 X_0 + \int_0^{\Theta_n} D_k \, d\theta - u_n \Gamma_n.$$

En ce qui concerne les rayons métacentriques, nous savons que le rayon métacentrique d'une carène quelconque est défini par l'expression $\frac{i}{V}$, dans laquelle V représente le volume de cette carène et i le moment d'inertie de sa flottaison par rapport à un axe longitudinal passant par son centre de gravité. Pour la carène limitée par la flottaison FL, dont nous représenterons le moment d'inertie par i_n, c'est-à-dire pour les carènes isobathes de la station, le rayon métacentrique sera

$$r_n = \frac{i_n}{V_n}.$$

Pour la carène limitée par la flottaison fl, dont le moment d'inertie n'est autre que i_n puisque la tranche est supposée cylindrique, le rayon métacentrique sera

$$r_{0,n} = \frac{i_n}{V_0};$$

telle est la formule qu'on trouve dans le Tableau III pour les rayons métacentriques isocarènes, et qu'on ne calcule d'ailleurs que dans le cas où l'on se propose de tracer la développée métacentrique isocarène, c'est-à-dire la développée de la courbe des centres de carène isocarènes.

Remarque. — Il va sans dire que, si, pour passer de l'isobathe à l'isocarène, on recule devant l'hypothèse de la tranche cylindrique, on pourra toujours, en associant les méthodes Barnes et Reech, trouver les résultats exacts. On déterminera les φ_n et ψ_n isobathes par les formules (1) et (2) ci-dessus, puis on emploiera la méthode générale d'interpolation graphique de Reech, en représentant en coordonnées rectangulaires les surfaces :

$$V = f(p, \theta), \qquad \varphi = F(p, \theta), \qquad \psi = \mathfrak{F}(p, \theta),$$

et en éliminant p entre V et φ, puis entre V et ψ; ce qui conduira aux réseaux

$$\varphi = F_1(V, \theta), \qquad \psi = \mathfrak{F}_1(V, \theta);$$

d'où enfin les $\varphi_{0,n}$ et $\psi_{0,n}$ isocarènes pour une valeur quelconque constante du volume V.

L ([1])

CALCUL DES ÉLÉMENTS GÉOMÉTRIQUES

DES CARÈNES INCLINÉES TRANSVERSALEMENT

(Méthode de Barnes).

Dimensions principales du bâtiment — TABLEAU I.

Longueur entre perpendiculaires, de l'axe du gouvernail à l'extrémité AV de la carène (contour extérieur de l'étrave à la flottaison, ou pointe de l'éperon)..	Λ =	
Longueur à la flottaison en charge (ligne d'eau n° 10 du plan des formes)...........................	L' =	
Longueur de la carène de la perpendiculaire AV à la face AR de l'étambot AV...........................	L =	
Largeur extérieure de la carène au fort, située à au-dessus ou au-dessous de la flottaison en charge.	l =	
Largeur extérieure maxima à la flottaison en charge.	l' =	
Creux sur fond de carène, au milieu, à la ligne droite des baux du pont supérieur.....................	c =	
Profondeur de carène, au milieu, correspondant à la flottaison en charge..............................	p =	
Tableau de la quille et de la fausse quille au milieu.	q =	
Tirants d'eau en charge — à la perpendiculaire AR....		
Tirants d'eau en charge — à la perpendiculaire AV....		
Tirants d'eau en charge — à la perpendiculaire M....	$p+q$ =	
Tirants d'eau en charge — Différence.............	Δ	
Assiette prévue.................................	$\frac{\Delta}{\Lambda}$ =	

Données à consulter pour les calculs de la station — TABLEAU II.

Équidistance des sections horizontales ou lignes d'eau du plan des formes..............................	$h = \frac{p}{10} =$	
Équidistance des sections verticales ou couples......	$\lambda = \frac{\Lambda}{20} =$	
Longueur de l'arc de 10° dans le cercle de rayon 1...	ω =	0,1745
Profondeur de carène constante pour la station..	p' =	
Volume de la carène limitée à la flottaison droite de la station (sans appendices)..................	V_0 =	

([1]) Nom du bâtiment.

Calculs relatifs à la • station

NUMÉROS des couples.	FLOTTAISON POUR 0°.			FLOTTAISON POUR 10°.					
	ORDONNÉES $i_0 = e_0 =$	CARRÉS des ordonnées $i_0^2 = e_0^2 =$	CUBES des ordonnées $i_0^3 = e_0^3 =$	ORDONNÉES (2 décimales).		CARRÉS des ordonnées (1 décimale).		CUBES des ordonnées (entiers).	
				i_1.	e_1.	i_1^2.	e_1^2.	i_1^3.	e_1^3.
PP.AV									
9									
8									
7									
6									
5									
4									
3									
2									
1									
PPM									
1									
2									
3									
4									
5									
6									
7									
8									
9									
PP.R									
Sommes des colonnes.	$\mathfrak{I}_0 \quad \mathcal{E}_0 =$	»	$\mathfrak{I}_0^3 = \mathcal{E}_0^3 =$	$\mathfrak{I}_1 =$	$\mathcal{E}_1 =$	$\mathfrak{I}_1^2 =$	$\mathcal{E}_1^2 =$	$\mathfrak{I}_1^3 =$	$\mathcal{E}_1^3 =$
»	$s_0 = \mathfrak{I}_0 + \mathcal{E}_0 =$	$\delta_0 = \mathfrak{I}_0^2 - \mathcal{E}_0^2 = 0$	$\sigma_0 = \mathfrak{I}_0^3 + \mathcal{E}_0^3 =$	$s_1 = \mathfrak{I}_1 + \mathcal{E}_1 =$		$\delta_1 = \mathfrak{I}_1^2 - \mathcal{E}_1^2 =$		$\sigma_1 = \mathfrak{I}_1^3 + \mathcal{E}_1^3 =$	
»	$s_0\lambda = A_0 =$	$\frac{1}{2}\delta_0\lambda = B_0 = 0$	$\frac{1}{3}\sigma_0\lambda = C_0 =$	$s_1\lambda = A_1 =$		$\frac{1}{2}\delta_1\lambda = B_1 =$		$\frac{1}{3}\sigma_1\lambda = C_1 =$	

$b_0 = \frac{1}{2} B_0 \omega = 0$
$V_0 =$
$V_0 - V_0 = u_0 = 0$

$$r_{0,0} = \frac{C_0}{V_0} =$$

$b_1 = \frac{1}{2} B_1 \omega =$
$V_1 = V_0 + b_0 + b_1 =$
$V_1 - V_0 = u_1 =$

$$r_{0,1} = \frac{C_1 - \frac{B_1^2}{A_1}}{V_0} =$$

L'indice n est relatif aux éléments géométriques de la carène limitée par une flottaison inclinée
La quantité b_n a le signe de la différence δ_n.
Dans les colonnes des ordonnées, on n'inscrit que la moitié de la première et de la dernière
cube de la première et de la dernière ordonnée.

TABLEAU III.

PLOTTAISON POUR 40°.						OBSERVATIONS.
ORDONNÉES (2 décimales).		CARRÉS des ordonnées (1 décimale).		CUBES des ordonnées (entiers).		
i_4.	e_4.	i_4^2.	e_4^2.	i_4^3.	e_4^3.	
$\mathfrak{I}_4 =$	$\mathfrak{C}_4 =$	$\mathfrak{I}_4^2 =$	$\mathfrak{C}_4^2 =$	$\mathfrak{I}_4^3 =$	$\mathfrak{C}_4^3 =$	
$_4 = \mathfrak{I}_4 + \mathfrak{C}_4$ =		$\delta_4 = \mathfrak{I}_4^2 - \mathfrak{C}_4^2$ =		$\sigma_4 = \mathfrak{I}_4^3 + \mathfrak{C}_4^3$ =		
$_4\lambda = A_4$ =		$\frac{1}{2}\delta_4\lambda = B_4$ =		$\frac{1}{3}\sigma_4\lambda = C_4$ =		

$b_4 = \frac{1}{2} B_4 \omega =$

$V_4 = V_3 + b_3 + b_4 =$

$V_4 - V_0 = u_4 =$

$r_{0,4} = \dfrac{C_4 - \dfrac{B_4^2}{A_4}}{V_0} =$

Figure type pour le relevé des ordonnées.

Formules générales à employer pour le Tableau III.

$A_n = \int (i_n + e_n)\, dx$

$B_n = \frac{1}{2} \int (i_n^2 - e_n^2)\, dx$

$C_n = \frac{1}{3} \int (i_n^3 + e_n^3)\, dx$

$V_n = V_0 + b_0 + 2b_1 + 2b_2 + \ldots + b_n$

$V_{n+1} = V_n + b_n + b_{n+1}$

$r_{0,n} = \dfrac{C_n - \dfrac{B_n^2}{A_n}}{V_0}$

Formules générales à employer pour le Tableau IV.

$u_n = V_n - V_0$

$V_0 \varphi_{0,n} = M_n - \mu'_n$

$V_0 \psi_{0,n} = N_n - \nu'_n$

$M_n = \omega P_n = \int_0^{\Theta_n} C \cos(\Theta_n - \theta)\, d\theta$

$N_n = \omega L_n = \int_0^{\Theta_n} C \sin(\Theta_n - \theta)\, d\theta$

$P_n = \Sigma_0^n C_k \cos(\Theta_n - \theta_k)$

$L_n = \Sigma_0^n C_k \sin(\Theta_n - \theta_k)$

$\mu'_n = u_n \dfrac{B_n}{A_n}$

$\nu'_n = \dfrac{u_n^2}{2A_n}$

de θ_n degrés.

ordonnée; dans les colonnes des carrés et des cubes, on n'inscrit que la moitié du carré et du

*Calculs relatifs aux isocarènes de la carène droite de la * station*

TABLEAU IV.

Θ_n.	10°.	20°.	30°.	40°.	Θ_n.	10°.	20°.	30°.	40°.
$\cos\Theta_n$.	0,985.	0,940.	0,866.	0,766.	$\sin\Theta_n$.	0,174.	0,342.	0,500.	0,643.
	$\frac{1}{2}C_0\cos 10°$ $\frac{1}{2}C_1\cos 0°$	$\frac{1}{2}C_0\cos 20°$ $C_1\cos 10°$ $\frac{1}{2}C_2\cos 0°$	$\frac{1}{2}C_0\cos 30°$ $C_1\cos 20°$ $C_2\cos 10°$ $\frac{1}{2}C_3\cos 0°$	$\frac{1}{2}C_0\cos 40°$ $C_1\cos 30°$ $C_2\cos 20°$ $C_3\cos 10°$ $\frac{1}{2}C_4\cos 0°$		$\frac{1}{2}C_0\sin 10°$ $\frac{1}{2}C_1\sin 20°$ o	$\frac{1}{2}C_0\sin 20°$ $C_1\sin 10°$ $\frac{1}{2}C_2\sin 0°$ o	$\frac{1}{2}C_0\sin 30°$ $C_1\sin 20°$ $C_2\sin 10°$ $\frac{1}{2}C_3\sin 0°$ o	$\frac{1}{2}C_0\sin 40°$ $C_1\sin 30°$ $C_2\sin 20°$ $C_3\sin 10°$ $\frac{1}{2}C_4\sin 0°$ o
P_n					L_n				
$M_n = \omega P_n$					$N_n = \omega L_n$				
u_n					u_n				
$\frac{B_n}{A_n}$					$2A_n$				
$\mu'_n = u_n\frac{B_n}{A_n}$					$\nu'_n = \frac{u_n^2}{2A_n}$				
$M_n - \mu'_n$					$N_n - \nu'_n$				
$\varphi_{0,n} = \frac{M_n - \mu'_n}{V_0}$					$\psi_{0,n} = \frac{N_n - \nu'_n}{V_0}$				

OBSERVATIONS.

$\varphi_{0,n}$ et $\psi_{0,n}$ sont les coordonnées rectangulaires de direction variable $\overline{C_0A}$ et $\overline{AC_{0,n}}$ du centre $C_{0,n}$ de la carène $f_{0,n}Hl_{0,n}$, isocarène de la carène droite de la * station (volume V_0).

L'origine C_0, fixe pour la station considérée, est le centre de carène de cette carène droite.

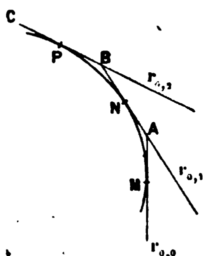
66. Méthode Dargnies. — Inclinaisons transversales.

Une méthode, qui précéda en France et provoqua même celle de Reech, est celle de Dargnies, insérée au *Mémorial du Génie maritime* (1864, 4e livraison). Elle a pour but, comme celle de Barnes, d'arriver rapidement à la connaissance des éléments des isocarènes d'un certain volume V_0, et surtout de la développée métacentrique appartenant à ces isocarènes, courbe qui n'est autre que le lieu des extrémités des rayons métacentriques isocarènes.

M. Dargnies, ingénieur des Messageries maritimes, ancien élève libre de l'École du Génie maritime, fonda sa méthode sur la remarque que, pour tracer la développée métacentrique, il n'était nullement besoin de connaître les coordonnées des centres de carène correspondants, et qu'il suffisait de connaître les longueurs des rayons métacentriques successifs; car la longueur d'arc de développée MN entre les extrémités de r_k et de r_{k+1} est égale à $r_{k+1} - r_k$.

En plaçant donc (*fig.* 104) des droites inclinées aux angles

Fig. 104.



successifs voulus, 0°, 10°, 20°, 30°, ..., de telle façon que les points d'intersection deux à deux A, B, C, ... et les points de contact avec l'enveloppe M, N, P, ... forment des longueurs se suivant en progression continue, on aura la courbe cherchée par le seul calcul de $r_{o,n}$.

Mais le rayon métacentrique r, en général, s'obtient, comme nous venons de le dire et comme nous le verrons plus tard en Géométrie, par le quotient $\frac{i}{V}$ du moment d'inertie de la flottaison correspondante, par rapport à l'axe d'inclinaison passant par son

centre de gravité, par le volume de carène correspondant. On est donc conduit à tracer sur le vertical les flottaisons successives isocarènes et à chercher leurs centres de gravité. M. Dargnies imagina le procédé ingénieux de ne faire de calculs que pour placer la première flottaison isocarène et son centre de gravité. On traçait ensuite les autres isocarènes en étudiant la variation des distances des centres de gravité successifs des flottaisons aux points d'intersection voisins, quitte à faire en fin de compte un contrôle nécessaire.

Considérons (*fig.* 105) les onglets v_i et v_e et la tranche u_n séparant la première flottaison isobathe FL de son isocarène *fl*. Appelons $i_0 = e_0$ les ordonnées, mesurées à partir de l'axe O, de

Fig. 105.

la flottaison droite F_0L_0 de la station; i_n et e_n celles, mesurées à partir du même axe O, de la première flottaison isobathe FL. Nous aurons, pour calculer la longueur $\overline{OO'}$,

$$v_i = \int_{A}^{R} i_n \frac{i_0 \sin\theta_n}{2} dx,$$

$$v_e = \int_{A}^{R} e_n \frac{i_0 \sin\theta_n}{2} dx$$

et

$$u_n \text{ (tranche)} = \int_{A}^{R} (i_n + e_n)\overline{OO'} \sin\theta_n dx.$$

Mais

$$u_n = v_i - v_e$$

ou

$$\overline{OO'}\lambda \sin\theta_n \sum_{A}^{R}(i_n + e_n) = \lambda \sin\frac{\theta_n}{2} \sum_{A}^{R} i_0(i_n - e_n),$$

d'où enfin

$$\overline{OO'} = \frac{1}{2} \frac{\sum_{A'}^{R} i_0(i_n - e_n)}{\sum_{A'}^{R} (i_n + e_n)}.$$

Pour trouver le centre de gravité G′ de la première flottaison isocarène *fl*, nous mesurerons maintenant, à partir de l'axe H, les ordonnées de cette flottaison que nous pouvons tracer grâce à la connaissance de OO′. Soient $i_{0,n}$ et $e_{0,n}$ ces ordonnées; on aura

$$\overline{HG'} \times \int (i_{0,n} + e_{0,n})\, dx = \frac{1}{2} \int (i_{0,n}^2 - e_{0,n}^2)\, dx$$

ou

$$\overline{HG'} = \frac{1}{2} \frac{\sum_{A'}^{R} (i_{0,n}^2 - e_{0,n}^2)}{\sum_{A'}^{R} (i_{0,n} + e_{0,n})}.$$

Connaissant les points O′ et G′, on placera à l'estime O″ sur *fl*, on mènera la seconde flottaison isocarène inclinée de 20° par O″, puis on placera sur cette flottaison G″ et O‴, et ainsi de suite jusqu'à 40°, où l'on fera une vérification directe du volume de carène, afin de retoucher, s'il y a lieu, les flottaisons précédentes. Cela fait, on aura, sur une flottaison isocarène quelconque, à mesurer les ordonnées $i_{0,n}$, $e_{0,n}$ à partir de l'axe H et à relever la longueur HG′, puis à écrire

$$r_{0,n} = \frac{\frac{1}{3} \int_{A'}^{R} (i_{0,n}^3 + e_{n,0}^3)\, dx - \overline{HG'}^2 . \int_{A'}^{R} (i_{0,n} + e_{0,n})\, dx}{V_0}.$$

Pour contrôle, on tracera une courbe des valeurs de $r_{0,n}$, avant de procéder au tracé de la développée métacentrique.

67. Méthode Daymard. — Inclinaisons transversales.

En 1883, M. Daymard, ingénieur de la Marine, ingénieur en chef de la Compagnie générale transatlantique, fit connaître une méthode (¹) où il calcule, par les onglets immergés et émergés, les positions des centres des carènes d'une station; mais en fai-

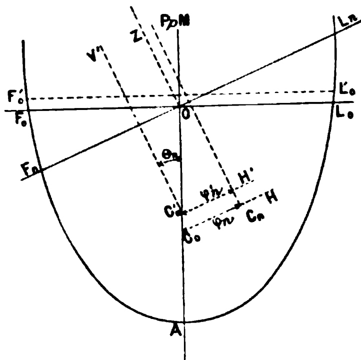
(¹) *Mémorial du Génie maritime*, 8ᵉ livraison, 1883. — *Transactions of the Institution of Naval Architects*, vol. XXV, p. 57; 1884.

sant usage, pour déterminer ces positions, de coordonnées d'une nouvelle espèce. Au lieu de calculer X_n, Y_n, Z_n comme Reech et Risbec pour les carènes isobathes; ou φ_n, ψ_n pour les isobathes et $\varphi_{0,n}$, $\psi_{0,n}$ pour les isocarènes comme Barnes, M. Daymard calcule φ'_n et ψ'_n, coordonnées polaires du centre C_n de la carène isobathe, comptées à partir d'une origine variable C'_n qui est le centre de carène de la carène droite $F'_0L'_0$ qui aurait même volume que l'isobathe variable limitée par la flottaison F_nL_n.

Calculons ces coordonnées nouvelles φ'_n et ψ'_n.

Soit (*fig.* 106) F_nL_n, la $n^{\text{ième}}$ flottaison inclinée de la station O, dont la flottaison droite est F_0L_0. Menons $F'_0L'_0$ flottaison droite

Fig. 106.



limitant une carène droite de volume V_n égal à celui de la carène inclinée; C_0 est le centre de carène de la carène droite F_0L_0, C'_n celui de la carène droite $F'_0L'_0$, C_n celui de la carène inclinée F_nL_n. Il faut ici prendre les moments par rapport à deux plans, l'un perpendiculaire, l'autre parallèle à F_nL_n, et passant tous deux par C'_n.

Prenons d'abord, pour avoir φ'_n, les moments par rapport au plan C'_nV' des volumes V_n et $V_0 + v_i - v_e$ (v_i, v_e, volumes des onglets OL_0L_n, OF_0F_n). On aura

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} V_n\varphi'_n &= -V_0(Z_0 - Z'_n)\sin\theta_n + M_{oz}(v_i) - M_{oz}(v_e) \\ &\qquad + M_{C'_nV'}(v_i - v_e \text{ appliqué en O}) \\ &= -V_0(Z_0 - Z'_n)\sin\theta_n + \int_0^{\theta_n} C_k\cos(\theta_n - \theta_k)\,d\theta \\ &\qquad + (V_n - V_0)Z'_n\sin\theta_n \\ &= \int_0^{\theta_n} C_k\cos(\theta_n - \theta_k)\,d\theta - (V_0Z_0 - V_nZ'_n)\sin\theta_n; \end{aligned}\right.$$

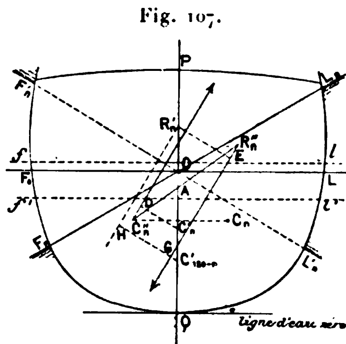
en appelant Z'_n le Z du point variable C'_n au-dessous de la flottaison droite de la station considérée, Z fourni d'ailleurs comme Z_0 par le Tableau de calculs des carènes droites.

Prenons maintenant, pour avoir ψ'_n, les moments des mêmes volumes par rapport au plan $C'_n H'$

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} V_n\psi'_n &= V_0(Z_0 - Z'_n)\cos\Theta_n + M_{F_nL_n}(v_i) - M_{F_nL_n}(v_e) \\ &\qquad - M_{C'_nH'}(v_i - v_e \text{ appliqué en O}) \\ &= V_0(Z_0 - Z'_n)\cos\Theta_n + \int_0^{\Theta_n} C_k \sin(\Theta_n - \theta_k)\, d\theta \\ &\qquad - (V_n - V_0) Z'_n \cos\Theta_n \\ &= \int_0^{\Theta_n} C_k \sin(\Theta_n - \theta_k)\, d\theta + (V_0 Z_0 - V_n Z'_n)\cos\Theta_n. \end{aligned}\right.$$

Les formules (1) et (2) ci-dessus, donnant φ'_n et ψ'_n, peuvent s'appliquer continûment de 0° à 180°; toutefois, on remarquera que, pour les angles de 90° à 180°, on peut utiliser des résultats déjà acquis. Voici, en effet, les relations qui lient le bras de levier φ'_{180-n} de la carène isobathe inclinée de $180° - \Theta_n$ à celui φ'_n de la carène inclinée de Θ_n. Soit O (*fig.* 107) le point définissant la station. La flottaison inclinée de Θ_n est F_nL_n limitant la carène F_nQL_n. La flottaison inclinée de $180° - \Theta_n$ est $F'_nL'_n$ limitant la carène $F'_nPL'_n$. La carène droite fl, isocarène de F_nQL_n, a son centre en C'_n. La carène droite $f'l'$, isocarène de $F'_nPL'_n$ et comptée à partir de la ligne d'eau zéro du plan de formes passant en Q, a son centre en C'_{180-n} et elle a pour volume un volume égal à F_nPL_n, c'est-à-dire complémentaire de F_nQL_n, ou $W - V_n$, en désignant par W le volume total de la coque fermée en haut par le pont supérieur; autrement dit, C'_{180-n} est le centre de la carène obtenue en retranchant de la carène totale une carène droite $f'Pl'$ de volume V_n à la partie supérieure.

Fig. 107.



Nous allons chercher maintenant le centre de carène R''_n de la carène $F'_nPL'_n$.

Soit donc C_n le centre de la carène $F_n Q L_n$; le centre de la carène symétrique $F''_n Q L'_n$ sera symétrique en C''_n, et le centre R''_n de la carène complémentaire $F'_n Q L'_n$ sera sur la ligne qui joint C''_n au point A, centre du volume total, et à une distance telle de ce point A que l'on ait

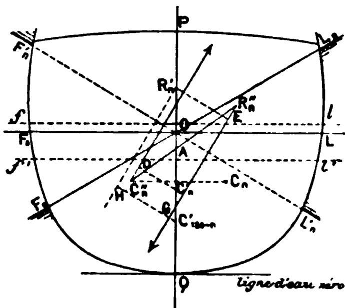


Fig. 107.

$$\overline{AR''_n}(W - V_n) = \overline{C''_n A}.V_n.$$

Prenons maintenant en R'_n le centre d'une carène droite fPl de volume $(W - V_n)$ comptée à partir du haut. Ce point R'_n sera l'homologue de C'_n par rapport au point A. Menons par les points C''_n et R''_n des perpendiculaires à la flottaison $F'_n L'_n$ et par les points C'_n et R'_n des parallèles à cette flottaison jusqu'aux perpendiculaires ci-dessus; la droite $\overline{C'_n D}$ est égale (comme symétrique) à φ'_n ; quant à $\overline{R'_n E}$, elle est l'homologue de $C'_n D$, et l'on a

$$\overline{R'_n E}(W - V_n) = \overline{C'_n D}.V_n.$$

Or ce que nous voulons, c'est la distance $\overline{GC'_{180-n}} = \varphi'_{180-n}$ du point C'_{180-n} à la direction $R''_n G$ de la poussée correspondante. Cette distance est égale à $\overline{HC'_{180-n}} - \overline{HG}$, c'est-à-dire à

$$\overline{HC'_{180-n}} - \overline{R'_n E}.$$

On a donc

$$\varphi'_{180-n} = \overline{R'_n C'_{180-n}} \sin\theta_n - \varphi'_n \frac{V_n}{W - V_n}.$$

Reste à exprimer la hauteur $\overline{R'_n C'_{180-n}}$ en fonction de quantités déjà calculées. Nous avons, en prenant les distances ζ_n au-dessus de la ligne zéro, dans le Tableau des carènes droites,

$$\overline{AC'_{180-n}} = \zeta_W - \zeta_{180-n},$$

$$\overline{AR'_n} = \overline{AC'_n} \frac{V_n}{W - V_n} = (\zeta_W - \zeta_n) \frac{V_n}{W - V_n};$$

d'où

$$\overline{R'_n C'_{180-n}} = \zeta_W - \zeta_{180-n} + (\zeta_W - \zeta_n) \frac{V_n}{W - V_n},$$

$$(W - V_n)\overline{R'_n C'_{180-n}} = (\zeta_W - \zeta_{180-n})(W - V_n) + (\zeta_W - \zeta_n) V_n;$$

d'où enfin

$$(3)\quad \varphi'_{180-n}(W-V_n) = \sin\theta_n[\zeta_W W - \zeta_{180-n}(W-V_n) - \zeta_n V_n] - \varphi_n V_n.$$

Description des Tableaux de calculs. — Les Tableaux de calculs qu'on trouvera à la fin du présent paragraphe ne sont pas identiques à ceux proposés par M. Daymard ([1]). Leur disposition a été modifiée de façon qu'on pût les décomposer en Tableaux du format réglementaire des dossiers des bâtiments. Dans la méthode Daymard, les calculs complets, étendus jusqu'aux inclinaisons de 180°, exigent l'emploi de deux feuilles doubles pour chaque station; mais, si l'on se borne aux inclinaisons habituelles jusqu'à 40° inclusivement, une feuille double suffit par station comme pour les autres méthodes.

Le Tableau I reproduit les dimensions principales du bâtiment. Le Tableau II indique les données nécessaires aux calculs de la station considérée, et, en particulier, le volume total de la coque, W, qui n'est pas donné sur le Tableau des carènes droites et qu'on sera obligé de calculer au préalable, au moyen de lignes d'eau droites supplémentaires, ou encore par une autre voie, celle des sommes d'onglets, dont nous parlerons tout à l'heure et qui donne lieu au Tableau VI.

Les calculs proprement dits font l'objet des Tableaux III, IV, V, VI et III′, ce dernier n'étant autre chose que la continuation, pour les fortes inclinaisons, du Tableau III.

Dans les Tableaux III et III′, on inscrit, exactement comme dans la méthode Reech-Risbec, les demi-ordonnées des flottaisons inclinées de la station, prises du côté de l'immersion, i, et du côté de l'émersion, e; puis leurs carrés i^2 et e^2, et leurs cubes i^3 et e^3. On fait ensuite les mêmes calculs des volumes isobathes V_n (auxquels on associe alors les volumes complémentaires $W - V_n$), et ceux des rayons métacentriques isobathes r_n, mais ceux-ci dans le cas seulement où l'on se proposerait d'en déduire le tracé des développées métacentriques isocarènes dont il sera parlé en Géométrie; aussi ce calcul de r_n, qui n'est pas indispensable à l'étude de la stabilité dès qu'on détermine les bras de levier isocarènes $\varphi_{0,n}$, ne figure-t-il pas dans les Tableaux originaux de M. Daymard.

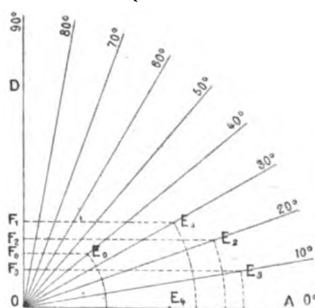
([1]) *Mémorial du Génie maritime.* Planches annexées à la huitième livraison; 1883.

Le Tableau IV mène ensuite pas à pas à la détermination de φ'_n; la signification des termes de ce Tableau et les formules qui y sont employées sont données dans la colonne *Observations* du Tableau III.

Il en est de même pour les termes et formules employés dans le Tableau V, lequel sert à la recherche des φ'_{180-n} pour les flottaisons inclinées d'angles compris entre 90° et 180°.

Le terme P_n du Tableau IV peut être calculé graphiquement, et non arithmétiquement comme dans la méthode, au moyen d'un cadran sur lequel on trace les vecteurs distants de 10° entre 0° et 90° (*fig.* 108). P_n est en effet une somme des projections, sui-

Fig. 108.



vant des angles variables de 10° en 10°, des quantités C_k fournies par les Tableaux III et III', car on a $P_n = \sum_0^n C_k \cos(\Theta_n - \theta_k)$. Pour se servir du cadran ci-dessus pour $\Theta_n = 40°$, par exemple, on portera sur l'horizontale OA $\frac{1}{2}C_0$, C_1, C_2, C_3 et $\frac{1}{2}C_4$. Puis, remarquant que $\Theta_n - 0° = 40°$, $\Theta_n - 10° = 30°$, ..., on ramènera par des arcs de cercle $\frac{1}{2}C_0$ sur le vecteur de 40° en OE_0, C_1 sur le vecteur de 30° en OE_1, C_2 sur le vecteur de 20° en OE_2, et ainsi de suite. Le terme P_n sera alors la somme des distances E_0F_0, E_1F_1, ..., E_4O_1, des points E_0, E_1, E_2, ..., $\frac{1}{2}C_4$ à l'axe OD. Même en opérant à une échelle assez petite, dit M. Daymard, on obtient, avec un peu d'attention, toute l'approximation désirable.

Le Tableau VI a été présenté par M. Daymard sous une forme restreinte, pour servir uniquement de vérification au calcul du volume V_0 de la carène droite de chaque station et de la distance Z_0 à la flottaison droite initiale de son centre de carène. Nous

l'avons développé de façon qu'il puisse donner en même temps à chaque station le volume complémentaire $W - V_0$ et par addition avec V_0 le volume total de la coque W, en même temps que la distance à la flottaison droite initiale du centre de carène R_0 (*fig.* 109) du volume complémentaire $W - V_0$, et aussi par suite la distance à cette flottaison du centre C_W du volume général. On pourra n'effectuer les calculs qui donnent le volume total W et son point d'application C_W qu'une seule fois, pour la première station par exemple; ou bien, on fera les calculs pour plusieurs stations et l'on prendra la moyenne des résultats.

Dans la première colonne du Tableau VI, on inscrit les angles d'inclinaison de 10° en 10°, de 0° à 90°; dans la deuxième, se trouvent les sommes $\mathcal{E}_0^2, \mathcal{E}_1^2, \ldots, \mathcal{E}_q^2$ relevées dans les Tableaux précédents III et III′ et dont on a soin de diviser par 2 les deux extrêmes; dans la troisième, les sommes $\mathfrak{I}_0^2, \mathfrak{I}_1^2, \ldots, \mathfrak{I}_q^2$ prises dans III et III′ et avec les extrêmes divisées par 2. Dans la quatrième et dans la cinquième colonne, on porte les sommes $\mathcal{E}_1^3, \ldots, \mathcal{E}_q^3$ et $\mathfrak{I}_1^3, \ldots, \mathfrak{I}_q^3$, des Tableaux III et III′, en n'inscrivant rien à la place qu'eussent dû occuper les termes $\mathcal{E}_0^3$ et $\mathfrak{I}_0^3$ et en divisant par 2 les termes $\mathcal{E}_q^3$ et $\mathfrak{I}_q^3$. Vient ensuite une sixième colonne où se trouvent les valeurs des sinus des angles d'inclinaison; enfin les septième et huitième colonnes ne renferment autre chose que les produits des colonnes 4 et 5 chacune par la sixième; les termes de ces colonnes représentent donc les expressions $\mathcal{E}_k^3 \sin\theta_k$ et $\mathfrak{I}_k^3 \sin\theta_k$.

Les sommes verticales des colonnes 2, 3, 7 et 8 représentent les sommations que la règle des trapèzes indique par les symboles $\sum_0^{90°} \mathcal{E}_k^2$, $\sum_0^{90°} \mathfrak{I}_k^2$, $\sum_0^{90°} \mathcal{E}_k^3 \sin\theta_k$ et $\sum_0^{90°} \mathfrak{I}_k^3 \sin\theta_k$.

Or nous avons vu au n° 4 que le volume O d'un onglet de $\Theta°$ a pour expression $\int_0^\Theta d\theta \int_0^X \frac{\rho^2}{2} dx$, c'est-à-dire qu'on a, en employant la notation de la règle des trapèzes,

$$O = \omega_a \frac{\lambda}{2} \sum_0^\Theta \sum_{\mathcal{N}}^{\mathcal{R}} \rho^2 = \frac{\omega_a \lambda}{2} \sum_0^\Theta \mathcal{E}_k^2$$

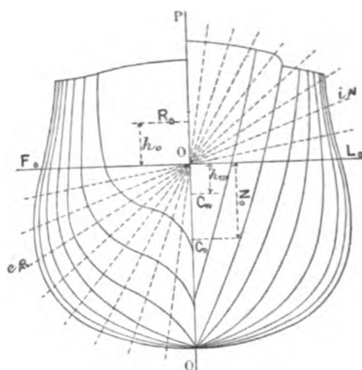
ou

$$\frac{\omega_a \lambda}{2} \sum_0^\Theta \mathfrak{I}_k^2,$$

suivant qu'il s'agit d'un onglet situé du côté de l'émersion ou de l'immersion. Si, en particulier, nous cherchons le volume d'un

onglet de 90° à partir de la flottaison initiale F_0L_0 de la station, nous obtiendrons la moitié du volume de la carène droite OF_0QL_0

Fig. 109.



d'une part, et la moitié de la carène complémentaire OL_0PF_0 de l'autre. Donc, en doublant, nous pourrons écrire

$$V_0 = \omega_a\,\lambda \sum_0^{90^\circ} \mathcal{C}_k^2 = \omega_a\,\lambda\,E^2$$

et

$$W - V_0 = \omega_a\,\lambda \sum_0^{90^\circ} \mathcal{I}_k^2 = \omega_a\,\lambda\,I^2;$$

d'où

$$W = \omega_a\,\lambda\left(\sum_0^{90^\circ} \mathcal{C}_k^2 + \sum_0^{90^\circ} \mathcal{I}_k^2\right) = \omega_a\,\lambda(E^2 + I^2),$$

en appelant E^2 et I^2 les sommations

$$\sum_0^{90^\circ} \mathcal{C}_k^2 \quad \text{et} \quad \sum_0^{90^\circ} \mathcal{I}_k^2.$$

Nous savons aussi (n° 4) que le moment M_{oxy} du volume O d'un onglet de Θ° par rapport au feuillet origine a pour expression

$$M_{oxy} = \int_0^{\Theta} \sin\theta\,d\theta \int_0^{X} \frac{\rho^3}{3}\,dx;$$

d'où, avec la notation de la règle d'intégration des trapèzes, pour les onglets de 90°

$$M_{oxy} = \frac{\omega_a\,\lambda}{3} \sum_0^{90^\circ} \sin\theta_k \sum_{X}^{\mathcal{X}} \rho^3 = \frac{\omega_a\,\lambda}{3} \sum_0^{90^\circ} \sin\theta_k\,\mathcal{C}_k^3 = \frac{\omega_a\,\lambda}{3}\,E^3$$

ou

$$\frac{\omega_a \lambda}{3} \sum_0^{90°} \sin\theta_k \cdot \mathfrak{I}_k^3 = \frac{\omega_a \lambda}{3} I^3,$$

suivant qu'il s'agit d'un onglet d'émersion ou d'immersion, et en désignant par E^3 et I^3 les sommations

$$\sum_0^{90°} \mathcal{E}_k^3 \sin\theta_k \quad \text{et} \quad \sum_0^{90°} \mathfrak{I}_k^3 \sin\theta_k.$$

On aura donc les distances, Z_0 et h_0, à la flottaison droite F_0L_0, du centre de la carène droite V_0 et du centre de la carène complémentaire droite $W - V_0$, en posant

$$V_0 Z_0 = 2 \frac{\omega_a \lambda}{3} E^3$$

et

$$(W - V_0) h_0 = 2 \frac{\omega_a \lambda}{3} I^3,$$

c'est-à-dire

$$Z_0 = \frac{2}{3} \frac{E^3}{E^2} \quad \text{et} \quad h_0 = \frac{2}{3} \frac{I^3}{I^2}.$$

Enfin on obtiendra la distance h_W, à la flottaison F_0L_0, du centre C_W du volume total W en écrivant l'équation des moments par rapport au plan F_0L_0

$$h_W W = h_0(W - V_0) - V_0 Z_0,$$

qui, simplifiée, devient

$$h_W = \frac{2}{3} \frac{I^3 - E^3}{I^2 + E^2};$$

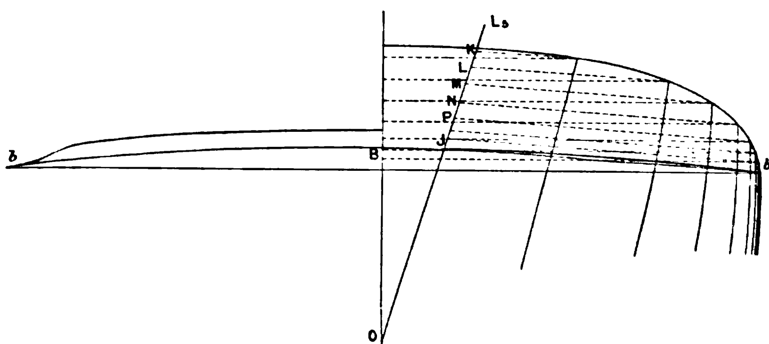
h_W sera au-dessus ou au-dessous de F_0L_0 suivant que le second membre de cette relation sera positif ou négatif.

Les ordonnées i_n des flottaisons inclinées, du côté de l'immersion, aboutissent au pont pour les grands angles d'inclinaison; or les intersections des couples avec le pont ne sont pas tracées sur le vertical; on n'y trace, en général, que les livets, comme nous l'avons déjà dit (n° 64); et, dans la méthode Reech, on limite l'ordonnée i_n au livet (*fig.* 101).

M. Daymard recommande une pratique plus précise qui consiste à tracer l'intersection bBb du maître-couple avec le pont (*fig.* 110), puis, pour une flottaison inclinée donnée, OL_5 par

exemple, à joindre sur ce maître-couple le point b du livet au point J d'intersection du bouge avec la flottaison inclinée. On projettera ensuite sur OL_5 parallèlement à bJ toutes les intersections du livet avec les différents couples, et ce seront les points

Fig. 110.



K, L, M, N, ... ainsi obtenus qu'on prendra pour aboutissements des ordonnées inclinées i_5 sur la flottaison OL_5.

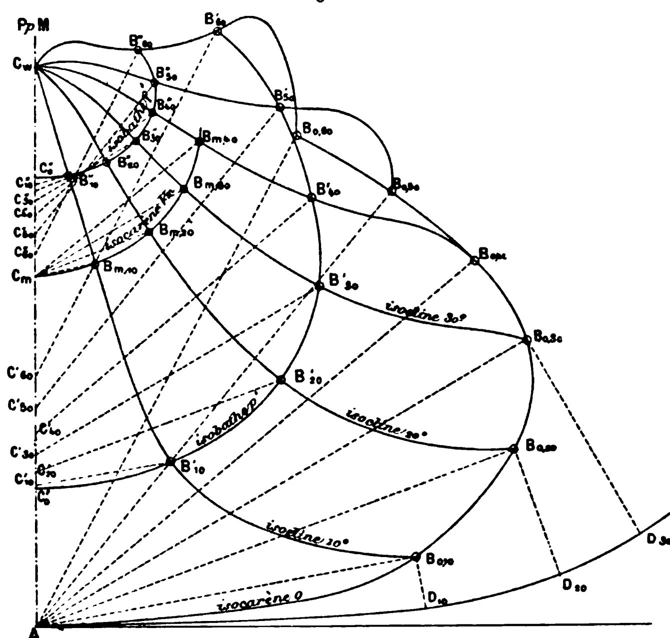
L'avantage que présente la méthode Daymard sur la méthode Reech-Risbec est de conduire beaucoup plus simplement à la connaissance du bras de levier isocarène $\varphi_{0,n}$ pour un volume V_0 déterminé. Pour passer des coordonnées spéciales et isobathes φ'_n, calculées dans la méthode Daymard, aux bras de levier isocarènes $\varphi_{0,n}$, on n'a en effet qu'à tracer l'unique graphique ci-après :

Sur le plan, à une échelle quelconque, du maître-couple, on place sur l'axe et à partir du point A, intersection de cet axe avec la ligne d'eau zéro, les centres des isocarènes droites des carènes inclinées de chaque station : C'_0, C'_{10}, C'_{20}, ..., pour la première station; C''_0, C''_{10}, C''_{20}, ..., pour la deuxième, et ainsi de suite (*fig.* 111). Les hauteurs de ces points au-dessus de A se trouvent dans les Tableaux de calculs des carènes droites. Le point C_W, centre du volume général, a aussi été déterminé de la façon que nous avons vue précédemment.

Cela fait, par les points C'_{10}, C''_{10}, ..., $C^{(m)}_{10}$, on mène des rayons vecteurs inclinés de 10° sur l'horizontale, sur lesquels on porte : φ'_{10} à partir de C'_{10}, φ''_{10} à partir de C''_{10}, ... Par les points C'_{20}, C''_{20}, ..., on mène des vecteurs inclinés de 20° sur l'horizontale, et l'on y porte : φ'_{20} à partir de C'_{20}, φ''_{20} à partir de C''_{20}, ..., et ainsi du reste. On joint les points obtenus B'_{10}, B'_{20}, B'_{30}; B''_{10},

B''_{20}, B''_{30}; …, en les groupant par stations; et B'_{10}, B''_{10}, …; B'_{20}, B''_{20}; …, en les groupant par inclinaisons. Les premières courbes B'_{10}, B'_{20}, B'_{30} représentent chacune la courbe en coordon-

Fig. 111.



nées polaires, *mais à partir d'un pôle variable,* du bras de levier d'une poussée isobathe. Les secondes courbes B'_{10}, B''_{10}, B'''_{10}, … représentent chacune la courbe, en coordonnées obliques, des bras de levier des poussées isoclines, mesurés à partir des centres *variables* des volumes isocarènes.

Nous remarquerons ici que, pour chacune des dernières courbes, B'_{10}, B''_{10}, …, par exemple, on connaît, outre les points calculés, deux points (les extrémités), ce qui est un grand avantage pour leur tracé. Imaginons en effet que le volume total de la coque soit immergé, le centre C_W de ce volume restera le même, quelle que soit l'orientation de la flottaison, c'est-à-dire que toutes les isoclines de 10°, 20°, 30°, … devront passer par le point C_W. Considérons, d'autre part, les tangentes au contour du maître-couple inclinées de 10°, 20°, 30°, …. Ces tangentes détacheront des volumes nuls dont les centres D_n ne seront autres que

les points de contact, et l'on obtiendra les bras de levier $\varphi_{0,n}$ de ces isocarènes nulles en considérant l'isocarène droite qui se réduit à son centre, le point A, et en abaissant de A des perpendiculaires sur les poussées, normales au contour du maître-couple en D_{10}, D_{20}, ... Les points ainsi obtenus $B_{0,10}$, $B_{0,20}$, $B_{0,30}$, ... sont les aboutissements vers l'extérieur des courbes isoclines.

Comme nous l'avons vu, la propriété d'une isocline quelconque (celle de 30°, par exemple, pour fixer les idées) est, non seulement que ses ordonnées obliques, inclinées ici de 30°, représentent les bras de levier, par rapport à un point variable il est vrai, des pantocarènes isoclines, depuis le volume $V = 0$ jusqu'au volume total de la coque; mais encore que le pied $C_{m,30}$ d'une ordonnée passant par un point quelconque $B_{m,30}$ est justement, en position, le centre d'une carène droite isocarène de la carène, inclinée de 30°, dont le bras de levier est $\overline{C_{m,30}B_{m,30}}$ (*fig.* 112).

Fig. 112.

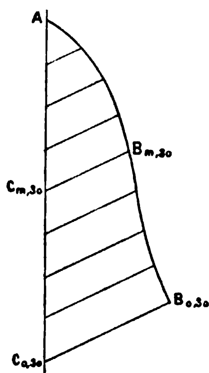
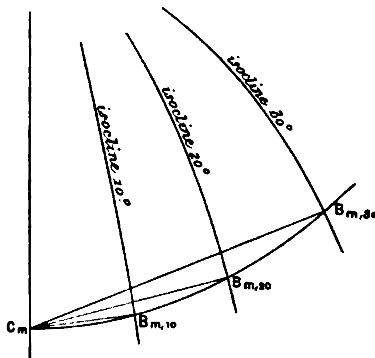


Fig. 113.



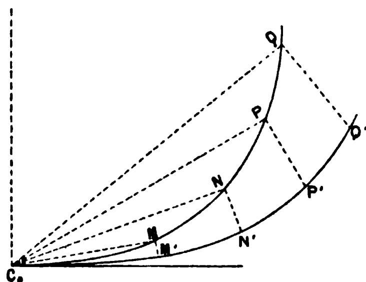
Dès lors et inversement, si, par un point C_m commun (*fig.* 111 et 113), on mène un faisceau de rayons vecteurs en arrêtant celui incliné de 10° sur l'isocline de 10°, celui de 20° sur l'isocline de 20°, etc., en joignant les points $B_{m,10}$, $B_{m,20}$, $B_{m,30}$, ..., on aura, en coordonnées polaires et avec pôle unique, la courbe des bras de levier $\varphi_{0,n}$ des poussées isocarènes pour le volume V_m dont le centre de carène droite est en C_m. Pour avoir la courbe polaire des bras de levier isocarènes et de volume V, il faudra donc seulement chercher, dans les Tableaux de calculs des carènes droites, la hauteur au-dessus du point A du centre C de la carène

droite de volume V, puis, sur le graphique, mener par le point C le faisceau des rayons vecteurs, qu'on arrêtera chacun à l'isocline correspondante.

Cette courbe des bras de levier isocarènes peut naturellement se traduire aussi en coordonnées rectangulaires en prenant les angles pour abscisses comme dans la méthode Reech-Risbec, mais la courbe polaire est tout aussi précise pour les mesures, en général.

Nous terminerons cet exposé de la méthode Daymard en disant que, pour construire une développée par points, en se servant des rayons métacentriques isobathes r_n, dont les calculs sont indiqués dans les Tableaux, il faudrait, en toute rigueur, après en avoir déduit par interpolation les rayons métacentriques isocarènes $r_{0,n}$, calculer encore les coordonnées ψ'_n et en déduire par interpolation les coordonnées isocarènes $\psi_{0,n}$ pour le volume V choisi. Cela fait, à partir de chaque point M, N, P, ... de la courbe des $\varphi_{0,n}$ isocarènes (*fig.* 114), on porterait sur des perpendiculaires aux vecteurs les $\psi_{0,n}$ en MM', NN', PP', de façon à passer de la courbe MNP des bras de levier isocarènes à la courbe isocarène M'N'P' des centres de carène eux-mêmes en vraie position. On n'aurait plus qu'à porter les $r_{0,n}$ sur les directions M'M, N'N, P'P, ..., à partir de M'N'P', ... Le lieu des extrémités M'', N'', P'' serait la développée métacentrique isocarène pour le volume V_0.

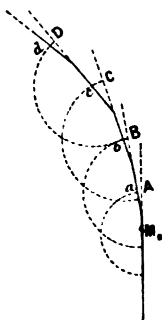
Fig. 114.



Cette marche serait d'une longueur hors de proportion avec le but à atteindre; et, pour construire la développée d'une façon plus précise que comme une enveloppe des directions MM', NN', PP', ..., on peut encore employer les $r_{0,n}$ comme dans la méthode

Dargnies déjà exposée au n° 66, en remarquant que les longueurs d'arcs successives de cette développée sont égales à $r_{0,k+1} - r_{0,k}$. Dès lors, à partir de l'extrémité du premier rayon $r_{0,0}$ (*fig.* 115) on décrira un cercle de rayon $r_{0,1} - r_{0,0} = M_0A$. Au milieu de M_0A on mènera une droite, inclinée de 10° sur M_0A, qui coupe le cercle en a. De a comme centre avec un rayon $r_{0,2} - r_{0,1} = aB$, on décrira un second cercle, et par le milieu de aB on mènera une

Fig. 115.



droite, inclinée de 10° sur aB, et coupant le second cercle en b, qu'on prendra comme centre d'un troisième cercle, et ainsi de suite. La développée sera la courbe passant par les points M_0, a, b, ..., et tangente en ces points aux droites inclinées de 10° en 10°. On peut donc tirer un résultat relativement rapide du calcul de r_n, et c'est pourquoi nous avons cru utile d'introduire dans les Tableaux de M. Daymard la légère complication qui en est la conséquence, en ayant bien soin d'ailleurs d'indiquer que le calcul supplémentaire de r_n peut être laissé de côté quand on n'a pas en vue la construction toute spéciale des développées métacentriques.

L ([1])

CALCUL DES ÉLÉMENTS GÉOMÉTRIQUES

DES CARÈNES INCLINÉES TRANSVERSALEMENT.

(Méthode de M. Daymard.)

Dimensions principales du bâtiment. TABLEAU I.

Longueur entre perpendiculaires, de l'axe du gouvernail à l'extrémité *AV* de la carène (contour extérieur de l'étrave à la flottaison, ou pointe de l'éperon)..	$\Lambda =$	
Longueur à la flottaison en charge (ligne d'eau n° 10 du plan des formes)...........................	$L' =$	
Longueur de la carène, de la perpendiculaire *AV* à la face *AR* de l'étambot *AV*.........................	$L =$	
Largeur extérieure de la carène au fort, située à au-dessus ou au-dessous de la flottaison en charge.	$l =$	
Largeur extérieure maxima à la flottaison en charge.	$l' =$	
Creux sur fond de carène, au milieu, à la ligne droite des baux du pont supérieur.....................	$c =$	
Profondeur de carène, au milieu, correspondant à la flottaison en charge............................	$p =$	
Tableau de la quille et de la fausse quille au milieu.	$q =$	
Tirants d'eau en charge { à la perpendiculaire *AR*....		
Tirants d'eau en charge { à la perpendiculaire *AV*....		
Tirants d'eau en charge { à la perpendiculaire M....	$p + q =$	
Tirants d'eau en charge { Différence.............	$\Delta =$	
Assiette prévue	$\frac{\Delta}{\Lambda} =$	

Données à consulter pour les calculs de la • station. TABLEAU II.

Équidistance des sections horizontales ou lignes d'eau du plan des formes..............................	$h = \frac{p}{10} =$	
Équidistance des sections verticales ou couples......	$\lambda = \frac{\Lambda}{20} =$	
Longueur de l'arc de 10° dans le cercle de rayon 1...	$\omega =$	0,1745
Profondeur de carène constante pour la • station..	$p' =$	
Volume de la carène limitée à la flottaison droite de la • station (sans appendices).................	$V_0 =$	
Distance au-dessous de cette flottaison droite du centre de carène correspondant..................	$Z_0 =$	
Distance à la ligne d'eau zéro du centre de carène correspondant..	$\zeta_0 =$	
Volume total du navire jusqu'au pont supérieur (sans appendices)..	$W =$	
Distance à la ligne d'eau zéro du centre de carène du volume total W..............................	$\zeta_W =$	

([1]) Nom du bâtiment.

Calculs relatifs à la ° station.

NUMÉROS des couples.	FLOTTAISON POUR 0°-180°.			FLOTTAISON POUR 10°-170°.					
	ORDONNÉES $i_0 = e_0 =$	CARRÉS des ordonnées. $i_0^2 = e_0^2 =$	CUBES des ordonnées. $i_0^3 = e_0^3 =$	ORDONNÉES (2 décimales).		CARRÉS des ordonnées (1 décimale).		CUBES des ordonnées (entiers).	
				i_1.	e_1.	i_1^2.	e_1^2.	i_1^3.	e_1^3.
PP$\mathcal{A}$ 9 8 7 6 5 4 3 2 1 PPM 1 2 3 4 5 6 7 8. 9 PPÆ									
Sommes des colonnes.	$^*\mathfrak{J}_0 = \mathfrak{E}_0$ $=$	»	$\mathfrak{J}_0^3 = \mathfrak{E}_0^3$ $=$	$^*\mathfrak{J}_1 =$	$^*\mathfrak{E}_1 =$	$\mathfrak{J}_1^2 =$	$\mathfrak{E}_1^2 =$	$\mathfrak{J}_1^3 =$	$\mathfrak{E}_1^3 =$
»	$^*s_0 = \mathfrak{J}_0 + \mathfrak{E}_0$ $=$	$\delta_0 = \mathfrak{J}_0^2 - \mathfrak{E}_0^2$ $= 0$	$\sigma_0 = \mathfrak{J}_0^3 + \mathfrak{E}_0^3$ $=$	$^*s_1 = \mathfrak{J}_1 + \mathfrak{E}_1$ $=$		$\delta_1 = \mathfrak{J}_1^2 - \mathfrak{E}_1^2$ $=$		$\sigma_1 = \mathfrak{J}_1^3 + \mathfrak{E}_1^3$ $=$	
»	$^*s_0\lambda = A_0$ $=$	$\frac{1}{2}\delta_0\lambda = B_0$ $= 0$	$\frac{1}{3}\sigma_0\lambda = C_0$ $=$	$^*s_1\lambda = A_1$ $=$		$\frac{1}{2}\delta_1\lambda = B_1$ $=$		$\frac{1}{3}\sigma_1\lambda = C_1$ $=$	

$b_0 = \frac{1}{2} B_0 \omega = 0$
$V_0 =$
$W - V_0 =$

$$^*r_0 = \frac{C_0}{V_0} =$$

$b_1 = \frac{1}{2} B_1 \omega =$
$V_1 = V_0 + b_0 + b_1 =$
$W - V_1 =$

$$^*r_1 = \frac{C_1 - \frac{B_1^2}{A_1}}{V_1} =$$

L'indice n est relatif aux éléments géométriques de la carène, limitée par une flottaison inclinée
La quantité b_n a le signe de la différence δ_n.
Dans les colonnes des ordonnées, on n'inscrit que la moitié de la première et de la dernière
cube de la première et de la dernière ordonnée.
Le Tableau III' n'est autre que la continuation du Tableau III.
Sur le Tableau IV, ζ_n représente la distance à la ligne d'eau zéro (donnée directement, ou au
carène *droite* de volume V_n ; et $+ Z'_n$ représente la distance, au-dessous de la flottaison droite
φ'_n est le bras de levier de la poussée, bras de levier de direction variable (parallèle à la
chaque carène d'une même station.
*.*Vota.* — Le calcul des rayons métacentriques isobathes r_n (et, par suite, des quantités $\mathfrak{J}_n$, $\mathfrak{E}_n$,
développées métacentriques isocarènes.

TABLEAU III.

FLOTTAISON POUR 40°-140°.						OBSERVATIONS.
ORDONNÉES (2 décimales).		CARRÉS des ordonnées (1 décimale).		CUBES des ordonnées (entiers).		
i_4.	e_4.	i_4^2.	e_4^2.	i_4^3.	e_4^3.	
$\mathfrak{I}_4 =$	$^*\mathfrak{E}_4 =$	$\mathfrak{I}_4^2 =$	$\mathfrak{E}_4^2 =$	$\mathfrak{I}_4^3 =$	$\mathfrak{E}_4^3 =$	
$s_4 = \mathfrak{I}_4 + \mathfrak{E}_4 =$		$\delta_4 = \mathfrak{I}_4^2 - \mathfrak{E}_4^2 =$		$\sigma_4 = \mathfrak{I}_4^3 + \mathfrak{E}_4^3 =$		
$s_4 \lambda = A_4 =$		$\frac{1}{2} \delta_4 \lambda = B_4 =$		$\frac{1}{3} \sigma_4 \lambda = C_4 =$		

$b_4 = \frac{1}{2} B_4 \omega =$
$V_4 = V_3 + b_3 + b_4 =$
$W - V_4 =$

$$^*r_4 = \frac{C_4 - \dfrac{B_4^2}{A_4}}{V_4} =$$

Figure type pour le relevé des ordonnées.

Formules générales à employer pour les Tableaux III et III'.

$A_n = \int (i_n + e_n)\, dx$
$B_n = \frac{1}{2} \int (i_n^2 - e_n^2)\, dx$
$C_n = \frac{1}{3} \int (i_n^3 + e_n^3)\, dx$
$V_n = V_0 + b_0 + 2b_1 + 2b_2 + \ldots + b_n$
$V_{n+1} = V_n + b_n + b_{n+1}$

$$r_n = \frac{C_n - \dfrac{B_n^2}{A_n}}{V_n}$$

Formules générales à employer pour le Tableau IV.

$V_n \varphi'_n = M_n - \mu_n$
$P_n = \Sigma_0^n C_k \cos(\Theta_n - \theta_k)$

$$M_n = \omega P_n = \int_0^{\Theta_n} C \cos(\Theta_n - \theta)\, d\theta$$

$\mu_n = (V_0 Z_0 - V_n Z'_n) \sin \Theta_n$

Formules générales à employer pour le Tableau V.

$V_{180-n} = W - V_n$
$\varphi'_{180-n}(W - V_n) =$
$\sin \Theta_n [\zeta_W W - \zeta_{180-n}(W - V_n) - \zeta_n V_n]$
$- \varphi'_n V_n$

de Θ_n degrés.

ordonnée; dans les colonnes des carrés et des cubes, on n'inscrit que la moitié du carré et du

moyen d'une interpolation, par les Tableaux complets des carènes droites) du centre d'une
de la station considérée, du centre de cette même carène *droite* de volume V_n.
flottaison inclinée de Θ_n degrés), et en même temps issu d'une origine C'_n, variable pour

s_n et A_n) n'est nécessaire que si l'on se propose d'en déduire le tracé d'une ou plusieurs

Calculs relatifs à la • station.

NUMÉROS des couples.	FLOTTAISON POUR 50°-130°.						FLOTTAISON POUR 60°-120°.					
	ORDONNÉES (2 décimales).		CARRÉS des ordonnées (1 décimale).		CUBES des ordonnées (entiers).		ORDONNÉES (2 décimales)		CARRÉS des ordonnées (1 décimale).		CUBES des ordonné[es] (entiers).	
	i_5.	e_5.	i_5^2.	e_5^2.	i_5^3.	e_5^3.	i_6.	e_6.	i_6^2.	e_6^2.	i_6^3.	e_6^3.
PPAV												
9												
8												
7												
6												
5												
4												
3												
2												
1												
PPM												
1												
2												
3												
4												
5												
6												
7												
8												
9												
PPAR												
	$^*\mathcal{I}_5 =$	$^*\mathcal{E}_5 =$	$\mathcal{I}_5^2 =$	$\mathcal{E}_5^2 =$	$\mathcal{I}_5^3 =$	$\mathcal{E}_5^3 =$	$^*\mathcal{I}_6 =$	$^*\mathcal{E}_6 =$	$\mathcal{I}_6^2 =$	$\mathcal{E}_6^2 =$	$\mathcal{I}_6^3 =$	$\mathcal{E}_6^3 =$
	$^*s_5 = \mathcal{I}_5 + \mathcal{E}_5 =$		$\delta_5 = \mathcal{I}_5^2 - \mathcal{E}_5^2 =$		$\sigma_5 = \mathcal{I}_5^3 + \mathcal{E}_5^3 =$		$^*s_6 = \mathcal{I}_6 + \mathcal{E}_6 =$		$\delta_6 = \mathcal{I}_6^2 - \mathcal{E}_6^2 =$		$\sigma_6 = \mathcal{I}_6^3 + \mathcal{E}_6^3 =$	
	$^*s_5 \lambda = A_5 =$		$\frac{1}{2}\delta_5 \lambda = B_5 =$		$\frac{1}{3}\sigma_5 \lambda = C_5 =$		$^*s_6 \lambda = A_6 =$		$\frac{1}{2}\delta_6 \lambda = B_6 =$		$\frac{1}{3}\sigma_6 \lambda = C_6 =$	
	$b_5 = \frac{1}{2} B_5 \omega =$ $V_5 = V_4 + b_4 + b_5 =$ $W - V_5 =$ $^*r_5 = \dfrac{C_5 - \dfrac{B_5^2}{A_5}}{V_5} =$						$b_6 = \frac{1}{2} B_6 \omega =$ $V_6 = V_5 + b_5 + b_6 =$ $W - V_6 =$ $^*r_6 = \dfrac{C_6 - \dfrac{B_6^2}{A_6}}{V_6} =$					

Le Tableau III' n'est autre que la continuation du Tableau III.
La quantité b_n a le signe de la différence δ_n.
Dans les colonnes des ordonnées, on n'inscrit que la moitié de la première et de la dernière ordo[nnée]
première et de la dernière ordonnée.
*Nota. — Le calcul des rayons métacentriques isobathes r_n (et, par suite, des quantités $\mathcal{I}_n$, $\mathcal{E}_n$, s_n
centriques isocarènes.

TABLEAU III'.

FLOTTAISON POUR 80°-100°.						FLOTTAISON POUR 90°.					
ORDONNÉES (2 décimales).		CARRÉS des ordonnées (1 décimale).		CUBES des ordonnées (entiers).		ORDONNÉES (2 décimales).		CARRÉS des ordonnées (1 décimale).		CUBES des ordonnées (entiers).	
i_8.	e_8.	i_8^2.	e_8^2.	i_8^3.	e_8^3.	i_9.	e_9.	i_9^2.	e_9^2.	i_9^3.	e_9^3.
$\mathfrak{I}_8 =$	$*\mathcal{E}_8 =$	$\mathfrak{I}_8^2 =$	$\mathcal{E}_8^2 =$	$\mathfrak{I}_8^3 =$	$\mathcal{E}_8^3 =$	$*\mathfrak{I}_9 =$	$*\mathcal{E}_9 =$	$\mathfrak{I}_9^2 =$	$\mathcal{E}_9^2 =$	$\mathfrak{I}_9^3 =$	$\mathcal{E}_9^3 =$
$s_8 = \mathfrak{I}_8 + \mathcal{E}_8 =$		$\delta_8 = \mathfrak{I}_8^2 - \mathcal{E}_8^2 =$		$\sigma_8 = \mathfrak{I}_8^3 + \mathcal{E}_8^3 =$		$*s_9 = \mathfrak{I}_9 + \mathcal{E}_9 =$		$\delta_9 = \mathfrak{I}_9^2 - \mathcal{E}_9^2 =$		$\sigma_9 = \mathfrak{I}_9^3 + \mathcal{E}_9^3 =$	
$s_8 \lambda = A_8 =$		$\frac{1}{2}\delta_8 \lambda = B_8 =$		$\frac{1}{3}\sigma_8 \lambda = C_8 =$		$*s_9 \lambda = A_9 =$		$\frac{1}{2}\delta_9 \lambda = B_9 =$		$\frac{1}{3}\sigma_9 \lambda = C_9 =$	
$b_8 = \frac{1}{2} B_8 \omega =$ $V_8 = V_7 + b_7 + b_8 =$ $W - V_8 =$ $*r_8 = \dfrac{C_8 - \dfrac{B_8^2}{A_8}}{V_8} =$						$b_9 = \frac{1}{2} B_9 \omega =$ $V_9 = V_8 + b_8 + b_9 =$ $W - V_9 = V_9 =$ $*r_9 = \dfrac{C_9 - \dfrac{B_9^2}{A_9}}{V_9} =$					

née ; dans les colonnes des carrés et des cubes, on n'inscrit que la moitié du carré et du cube de la

A_8) n'est nécessaire que si l'on se propose d'en déduire le tracé d'une ou plusieurs développées méta-

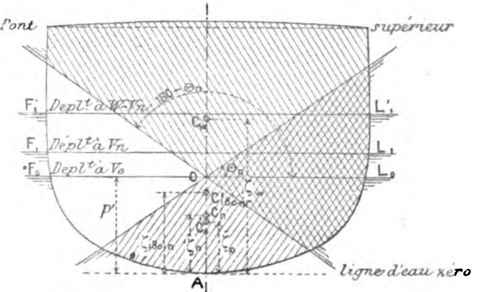
Calculs relatifs à la ᵉ *station.* **Tableau IV.**

Θ_n.	10°.	20°.	30°.	40°.	50°.	60°.	70°.	80°.	90°.
$\cos\Theta_n$.	0,985.	0,940.	0,886.	0,766.	0,643.	0,500.	0,342.	0,174.	0,000.
$\sin\Theta_n$.	0,174.	0,342.	0,500.	0,643.	0,766.	0,866.	0,940.	0,985.	1,000.
	$\frac{1}{2}C_0\cos 10°$ $\frac{1}{2}C_1\cos 0°$	$\frac{1}{2}C_0\cos 20°$ $C_1\cos 10°$ $\frac{1}{2}C_2\cos 0°$	$\frac{1}{2}C_0\cos 30°$ $C_1\cos 20°$ $C_2\cos 10°$ $\frac{1}{2}C_3\cos 0°$	$\frac{1}{2}C_0\cos 40°$ $C_1\cos 30°$ $C_2\cos 20°$ $C_3\cos 10°$ $\frac{1}{2}C_4\cos 0°$	$\frac{1}{2}C_0\cos 50°$ $C_1\cos 40°$ $C_2\cos 30°$ $C_3\cos 20°$ $C_4\cos 10°$ $\frac{1}{2}C_5\cos 0°$	$\frac{1}{2}C_0\cos 60°$ $C_1\cos 50°$ $C_2\cos 40°$ $C_3\cos 30°$ $C_4\cos 20°$ $C_5\cos 10°$ $\frac{1}{2}C_6\cos 0°$	$\frac{1}{2}C_0\cos 70°$ $C_1\cos 60°$ $C_2\cos 50°$ $C_3\cos 40°$ $C_4\cos 30°$ $C_5\cos 20°$ $C_6\cos 10°$ $\frac{1}{2}C_7\cos 0°$	$\frac{1}{2}C_0\cos 80°$ $C_1\cos 70°$ $C_2\cos 60°$ $C_3\cos 50°$ $C_4\cos 40°$ $C_5\cos 30°$ $C_6\cos 20°$ $C_7\cos 10°$ $\frac{1}{2}C_8\cos 0°$	$\frac{1}{2}C_0\cos 90°$ $C_1\cos 80°$ $C_2\cos 70°$ $C_3\cos 60°$ $C_4\cos 50°$ $C_5\cos 40°$ $C_6\cos 30°$ $C_7\cos 20°$ $C_8\cos 10°$ $\frac{1}{2}C_9\cos 0°$
P_n									
$M_n = \omega P_n$									
V_n									
ζ_n									
$\pm Z'_n$									
$\pm V_n Z'_n$									
$V_n Z_0 \mp V_n Z'_n = Q_n$									
$\mu_n = Q_n \sin\Theta_n$									
$M_n - \mu_n$									
$\varphi'_n = \dfrac{M_n - \mu_n}{V_n}$									

Voir les Observations et les Notes du Tableau III.

Calculs relatifs à la ° station. TABLEAU V.

INCLINAISON $\Theta_{180-n} = 180° - \Theta_n$.	180° — 80° ou 100°.	180° — 70° ou 110°.	180° — 60° ou 120°.	180° — 50° ou 130°.	180° — 40° ou 140°.	180° — 30° ou 150°.	180° — 20° ou 160°.	180° — 10° ou 170°.	180° — 0° ou 180°.
$V_{180-n} = W - V_n$									
ζ_{180-n}									
$\zeta_{180-n} \times (W - V_n) = T_n$									
ζ_n									
V_n									
$\zeta_n V_n = U_n$									
$T_n + U_n$									
$\zeta_W W - (T_n + U_n) = L_n$									
$L_n \sin \Theta_n$									
$\varphi'_n V_n$									
$L_n \sin \Theta_n - \varphi'_n V_n$									
$\varphi'_{180-n} = \dfrac{L_n \sin \Theta_n - \varphi'_n V_n}{W - V_n}$									



OBSERVATIONS

ζ_W et W sont pris dans le Tableau II, V_n et $W - V_n$ dans les Tableaux III et III′, ζ_n et φ'_n dans le Tableau IV.

Les valeurs de ζ_{180-n} (distances à la ligne d'eau zéro des centres des carènes *droites* de volume $W - V_n$) sont à prendre, ou à calculer par interpolation, dans les Tableaux complets des carènes droites.

Voir aussi les Observations et les Notes du Tableau III.

Calculs relatifs à la ᵉ *station.* **TABLEAU VI.**

FACTEURS.	ANGLES d'inclinaison θ_n.	SOMMES $\mathcal{E}_n^2$.	SOMMES $\mathcal{I}_n^2$.	SOMMES $\mathcal{E}_n^2$.	SOMMES $\mathcal{I}_n^2$.	SIN θ_n.	PRODUITS des colonnes 4 et 6.	PRODUITS des colonnes 5 et 6.
	1	2	3	4	5	6	7	8
½ 1 1 1 1 1 1 1 1 ½	0° 10° 20° 30° 40° 50° 60° 70° 80° 90°			»	»	0,000 0,174 0,342 0,500 0,643 0,766 0,866 0,940 0,985 1,000	0	0
» »	» »	$E^2 =$	$I^2 =$	» »	» »	» »	$E^3 =$	$I^3 =$
• »	» »	$V_0 = \omega\lambda E^2 =$	$W - V_0 = \omega\lambda I^2 =$	» »	» »	» »	$Z_0 = \frac{2}{3}\frac{E^3}{E^2} =$	$h_0 = \frac{2}{3}\frac{I^3}{I^2} =$
» »	» »	$W = \omega\lambda[E^2 + I^2] =$		» »	» »	» »	$h_W = \frac{2}{3}\frac{I^3 - E^3}{I^2 + E^2} =$	

Les sommes $\mathcal{E}_n^2$, $\mathcal{I}_n^2$, $\mathcal{E}_n^2$, $\mathcal{I}_n^2$ sont prises dans les Tableaux III et III'.

Z_0, h_0 et h_W sont les distances, à la flottaison droite F_0L_0 de la station, des centres de la carène droite V_0, de la carène complémentaire droite $W - V_0$ et de la carène totale W.

CHAPITRE X.

APPLICATION AU NAVIRE DES MÉTHODES DE CALCUL POUR LES CARÈNES INCLINÉES.

MÉTHODE EMPLOYANT SEULEMENT LES ORDONNÉES D'UN NOMBRE LIMITÉ DE FLOTTAISONS DROITES.

68. Méthode Guyou et Simart. — Inclinaisons transversales.

MM. Guyou, capitaine de frégate, et Simart, lieutenant de vaisseau, ont imaginé de calculer les rayons métacentriques $r_n = \frac{\mathfrak{I}_n}{V_n}$ de carènes inclinées suivant une loi quelconque, en faisant usage, non plus des ordonnées des flottaisons inclinées pour la détermination du moment d'inertie $\mathfrak{I}_n$ de ces flottaisons par rapport à une parallèle à leur axe passant par leur centre de gravité, mais bien des ordonnées de certaines flottaisons droites équidistantes. Malheureusement, pour exprimer l'ordonnée inclinée en fonction des ordonnées droites susdites et de l'angle d'inclinaison, il faut supposer le contour du couple continu dans toute l'étendue des onglets immergé et émergé, ce qui impose à cette méthode une condition limitative que ne comportent point les précédentes : celle de ne fournir *exactement* les éléments des carènes inclinées que pour les carènes limitées par une flottaison rencontrant les murailles du navire et non le pont supérieur.

Soit une carène F_0QL_0 (*fig.* 116). Traçons, tangentiellement en O à F_0L_0, une courbe quelconque OA, et considérons cette courbe comme la trace d'un cylindre enveloppe des flottaisons inclinées transversalement, flottaisons quelconques, d'ailleurs, et non isocarènes.

Dans ce cas, comme nous le verrons plus tard en Géométrie, le point de contact A n'est pas la projection du centre de gravité de

la flottaison inclinée ; cette propriété n'aurait lieu que si la courbe OA était enveloppe de flottaisons isocarènes. Marquons le point de contact A, pied de la génératrice de contact du cylindre enveloppe, et appelons i_n, e_n les ordonnées immergée et émergée de la flottaison inclinée, *mesurées à partir de cette génératrice*

Fig. 116.

de contact, tandis que y_0 représentera l'ordonnée de la flottaison droite F_0L_0 d'un côté ou de l'autre.

Nous commencerons par exprimer dans chaque couple i_n et e_n en fonction de l'angle θ et de quantités connues (paramètres de la courbe du couple et de la courbe donnée OA). Nous nous donnerons la courbe du couple, ou algébriquement par une relation $y=f(z)$ dans le système d'axes Oy et Oz de la figure, ou mieux, puisque la courbe du couple n'est pas analytique, par un développement

$$(1) \qquad y = y_0 + \frac{z}{1}\left(\frac{dy}{dz}\right)_0 + \frac{z^2}{1.2}\left(\frac{d^2y}{dz^2}\right)_0 + \frac{z^3}{1.2.3}\left(\frac{d^3y}{dz^3}\right)_0 + \ldots.$$

En d'autres termes, nous nous donnerons la forme du couple par les valeurs de y et de ses dérivées successives par rapport à z sur l'axe Oy ; et comme, en pratique, les différentielles $(dy)_0$, $(d^2y)_0$, ... seront remplacées par des différences $(\Delta y)_0$, $(\Delta^2 y)_0$, ... correspondant à des accroissements Δz de z, égaux, positifs et négatifs, à partir de F_0L_0, on s'explique l'introduction des flottaisons droites équidistantes dont nous avons parlé au début. On s'explique aussi que le contour du couple ne pourra être représenté exactement par le développement (1) que si le reste en peut être conservé négligeable, c'est-à-dire que si ce contour demeure

continu; on ne pourra donc faire usage du développement (1) que jusqu'au plat-bord M du navire.

Désignons maintenant par η_n et ζ_n les coordonnées AB et AC du point A dans le système yOz; nous aurons, en appelant y_n l'y du point L_n et z_n son z,

$$y_n = \eta_n + i_n \cos\theta, \tag{2}$$

$$z_n = \zeta_n + i_n \sin\theta, \tag{3}$$

y_n et z_n satisfaisant à la relation (1).

Les relations (1), (2) et (3) contiennent encore deux inconnues de trop, η_n et ζ_n, pour qu'on puisse exprimer i_n en fonction de θ et des coefficients que nous nous sommes donnés, y_0, $\left(\frac{dy}{dz}\right)_0$, $\left(\frac{d^2y}{dz^2}\right)_0$, ...

Pour éliminer η_n et ζ_n, il faut les exprimer en fonction des paramètres de la seconde courbe connue OA. Soit donc l'équation de cette courbe

$$\sigma = \psi(\theta),$$

ou mieux, le développement

$$\sigma = \sigma_0 + \frac{\theta}{1}\left(\frac{d\sigma}{d\theta}\right)_0 + \frac{\theta^2}{1.2}\left(\frac{d^2\sigma}{d\theta^2}\right)_0 + \frac{\theta^3}{1.2.3}\left(\frac{d^3\sigma}{d\theta^3}\right)_0 + \ldots, \tag{a}$$

en appelant σ l'arc de cette courbe compris entre les contacts de deux tangentes faisant entre elles l'angle θ.

Nous avons mené F_nL_n tangent à la courbe OA, ce que nous exprimerons en écrivant

$$d\eta_n = d\sigma_n \cos\theta \tag{b}$$

et

$$d\zeta_n = d\sigma_n \sin\theta. \tag{c}$$

En portant dans (*b*) et (*c*) le $d\sigma_n$ qu'on tirerait de (*a*), on aurait les deux relations cherchées, permettant d'obtenir l'expression de i_n en fonction de θ et des paramètres des deux courbes données, courbe du couple et courbe OA. Mais il est plus simple de ne pas faire, au préalable, l'élimination de σ et de conserver le système des six équations (1), (2), (3), (*a*), (*b*), (*c*), en remarquant, pour (*a*), que, si l'on compte les arcs à partir du

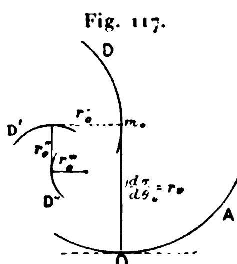
point O, $\sigma_0 = 0$, et que, d'autre part, les coefficients $\left(\frac{d\sigma}{d\theta}\right)_0$, $\left(\frac{d^2\sigma}{d\theta^2}\right)_0$, ... ne sont autres que les rayons initiaux des développées successives de la courbe OA, que nous appellerons r_0, r'_0, r''_0, ...

En effet, $\left(\frac{d\sigma}{d\theta}\right)_0$ est le rayon de courbure en O de OA, c'est-à-dire le rayon initial r_0 de la développée D;

$$\left(\frac{d^2\sigma}{d\theta^2}\right)_0 = \left[\frac{d}{d\theta}\left(\frac{d\sigma}{d\theta}\right)\right]_0 = \left(\frac{dr}{d\theta}\right)_0$$

est le rayon de courbure en m_0 de la développée D, c'est-à-dire

Fig. 117.



le rayon initial r'_0 de la développée D', et ainsi de suite (*fig.* 117).

Notre système complet d'équations s'écrira donc

$$\begin{array}{ll}
(1) & y_n = y_0 + \frac{z_n}{1}\left(\frac{dy}{dz}\right)_0 + \frac{z_n^2}{1.2}\left(\frac{d^2y}{dz^2}\right)_0 + \ldots, \\
(2) & y_n = \eta_n + i_n \cos\theta, \\
(3) & z_n = \zeta_n + i_n \sin\theta; \\
(a') & \sigma_n = \frac{\theta}{1} r_0 + \frac{\theta^2}{1.2} r'_0 + \frac{\theta^3}{1.2.3} r''_0 + \ldots, \\
(b) & d\eta_n = d\sigma_n \cos\theta, \\
(c) & d\zeta_n = d\sigma_n \sin\theta.
\end{array}$$

Supposons le problème résolu : nous avons obtenu i_n en fonction de θ et de coefficients constants connus y_0, $\left(\frac{dy}{dz}\right)_0$, $\left(\frac{d^2y}{dz^2}\right)_0$, r'_0, r''_0, ... ou, en général, i en fonction de la variable indépendante θ et de paramètres connus. En ordonnant i en fonction de θ, nous pourrons écrire

$$i = i_0 + \frac{\theta}{1}\left(\frac{di}{d\theta}\right)_0 + \frac{\theta^2}{1.2}\left(\frac{d^2i}{d\theta^2}\right)_0 + \frac{\theta^3}{1.2.3}\left(\frac{d^3i}{d\theta^3}\right)_0 + \ldots$$

La question est ainsi ramenée à calculer les coefficients constants $i_0, \left(\frac{di}{d\theta}\right)_0, \left(\frac{d^2 i}{d\theta^2}\right)_0, \dots$ en fonction des constantes données.

Pour cela, différentions (2) et (3) par rapport à la variable indépendante θ; il vient

$$dy_n = d\eta_n + di\cos\theta - \sin\theta\,d\theta,$$
$$dz_n = d\zeta_n + di\sin\theta + \cos\theta\,d\theta$$

ou

$$\frac{dy_n}{d\theta} = \frac{d\eta_n}{d\theta} + \frac{di}{d\theta}\cos\theta + i\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right),$$
$$\frac{dz_n}{d\theta} = \frac{d\zeta_n}{d\theta} + \frac{di}{d\theta}\sin\theta + i\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right).$$

Or, d'après (b),

$$\frac{d\eta_n}{d\theta} = \frac{d\sigma_n}{d\theta}\cos\theta = r\cos\theta$$

et, d'après (c),

$$\frac{d\zeta_n}{d\theta} = \frac{d\sigma_n}{d\theta}\sin\theta = r\sin\theta;$$

donc

$$(2') \qquad \frac{dy_n}{d\theta} = \left(r + \frac{di}{d\theta}\right)\cos\theta + i\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right),$$
$$(3') \qquad \frac{dz_n}{d\theta} = \left(r + \frac{di}{d\theta}\right)\sin\theta + i\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right);$$

d'où une équation double (A) remplaçant (2′) et (3′), grâce à la condition implicite que le coefficient de $\sqrt{-1}$ et le terme indépendant de $\sqrt{-1}$ soient réels,

$$(\mathrm{A}) \qquad \begin{cases} \dfrac{dy_n}{d\theta} + \sqrt{-1}\,\dfrac{dz_n}{d\theta} = \left(r + \dfrac{di}{d\theta}\right)e^{\sqrt{-1}\,\theta} + ie^{\sqrt{-1}\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)} \\ \qquad = \left(r + \dfrac{di}{d\theta} + \sqrt{-1}\,i\right)e^{\sqrt{-1}\,\theta}. \end{cases}$$

Les relations (2′) et (3′) ou (A) doivent être associées à l'équation (1) qui lie y à z d'une façon générale, et donne le $\frac{dy}{d\theta}$ en fonction du $\frac{dy}{dz}$ et du $\frac{dz}{d\theta}$; on a, en effet,

$$(4) \qquad y_n = f(z_n) \qquad \text{et, par suite,} \qquad \frac{dy_n}{d\theta} = \frac{dy_n}{dz_n}\frac{dz_n}{d\theta}.$$

Dès lors, en portant dans cette relation (4) les valeurs (2′) et

(3′), on aura le i et le $\frac{di}{d\theta}$ en fonction du $\frac{dy_n}{dz_n}$ par une certaine relation (B).

On fera ensuite $\theta = 0$, et l'on remarquera que r devient alors r_0, que i devient égal à y_0 et que $\frac{dy_n}{dz_n}$ devient $\left(\frac{dy}{dz}\right)_0$, en même temps que $\frac{di}{d\theta}$ devient $\left(\frac{di}{d\theta}\right)_0$.

Par cette hypothèse $\theta = 0$, faite dans la relation générale (B), on aura ainsi $\left(\frac{di}{d\theta}\right)_0$ en fonction de $i_0 = y_0$, de $\left(\frac{dy}{dz}\right)_0$ et de r_0.

Pour avoir les autres coefficients cherchés, $\left(\frac{d^2i}{d\theta^2}\right)_0$, $\left(\frac{d^3i}{d\theta^3}\right)_0$, ..., on différentiera tout simplement, autant de fois qu'il sera nécessaire, la relation générale (B) et, après chaque opération, on fera $\theta = 0$ et $\left(\frac{dz}{d\theta}\right)_0 = i_0 = y_0$ d'après la relation (3′). De cette façon, on change les $\frac{d^py_n}{dz_n^p}$ en $\left(\frac{d^py}{dz^p}\right)_0$, et les $r^{(q)}$ en $r_0^{(q)}$, que l'on connaît par hypothèse.

La relation générale (B), dont nous venons de parler, s'écrit :

$$\text{(B)} \qquad \frac{di}{d\theta}\left(\cos\theta - \frac{dy_n}{dz}\sin\theta\right) = \frac{dy_n}{dz}(r\sin\theta + i\cos\theta) + i\sin\theta - r\cos\theta.$$

Nous en tirerons

$$(\alpha) \qquad \left(\frac{di}{d\theta}\right)_0 = \left(\frac{dy}{dz}\right)_0 y_0 - r_0.$$

Puis, par différentiation et pour $\theta = 0$,

$$\begin{aligned}\left(\frac{d^2i}{d\theta^2}\right)_0 &= \left(\frac{d^2y}{dz^2}\right)_0 y_0^2 + 2\left(\frac{di}{d\theta}\right)_0\left(\frac{dy}{dz}\right)_0 + \left(\frac{dy}{dz}\right)_0 r_0 + y_0 - r'_0\\ &= \left(\frac{d^2y}{dz^2}\right)_0 y_0^2 + 2\left(\frac{dy}{dz}\right)_0^2 y_0 - 2\left(\frac{dy}{dz}\right)_0 r_0 + \left(\frac{dy}{dz}\right)_0 r_0 + y_0 - r'_0\\ &= \left(\frac{d^2y}{dz^2}\right)_0 y_0^2 + \left(\frac{dy}{dz}\right)_0\left[\frac{d}{dz}(y^2)\right]_0 - \left(\frac{dy}{dz}\right)_0 r_0 + y_0 - r'_0\end{aligned}$$

et, en associant les premier et second termes du second membre,

$$(\beta) \qquad \left(\frac{d^2i}{d\theta^2}\right)_0 = \frac{1}{3}\left(\frac{d^2y^3}{dz^2}\right)_0 - \left(\frac{dy}{dz}\right)_0 r_0 + y_0 - r'_0.$$

En continuant à différentier (B), on trouverait, pour $\theta = 0$,

$$(\gamma) \qquad \left(\frac{d^3i}{d\theta^3}\right)_0 = \frac{1}{4}\left(\frac{d^3y^4}{dz^3}\right)_0 - \frac{3}{2}r_0\left(\frac{d^2y^2}{dz^2}\right)_0 + \frac{5}{2}\left(\frac{dy^2}{dz}\right)_0 - r'_0\left(\frac{dy}{dz}\right)_0 - r''_0 - 2r_0$$

et

$$(\delta)\quad \left\{ \begin{aligned} \left(\frac{d^4 i}{d\theta^4}\right)_0 = \frac{1}{5}\left(\frac{d^4 y^5}{dz^4}\right)_0 - 2r_0\left(\frac{d^3 y^3}{dz^3}\right)_0 + \frac{14}{3}\left(\frac{d^2 y^3}{dz^2}\right)_0 \\ - 2r'_0\left(\frac{d^2 y^2}{dz^2}\right)_0 - (r''_0 + 11 r_0)\left(\frac{dy}{dz}\right)_0 + 5y_0 - r'''_0 - 3r'_0. \end{aligned} \right.$$

Pour le développement de $i = F(\theta)$ jusqu'au terme en θ^5, nous aurons donc à calculer par différences, au moyen de flottaisons droites parallèles à F_0L_0 et équidistantes, les coefficients suivants

$$\left(\frac{dy}{dz}\right)_0, \quad \left(\frac{d^2 y}{dz^2}\right)_0,$$

$$\left(\frac{dy^2}{dz}\right)_0, \quad \left(\frac{d^2 y^2}{dz^2}\right)_0,$$

$$\left(\frac{d^2 y^3}{dz^2}\right)_0, \quad \left(\frac{d^3 y^3}{dz^3}\right)_0,$$

$$\left(\frac{d^3 y^4}{dz^3}\right)_0,$$

et

$$\left(\frac{d^4 y^5}{dz^4}\right)_0.$$

Une fois la question résolue, c'est-à-dire i exprimé en fonction de θ au moyen des coefficients propres aux courbes $y = f(z)$ et $\sigma = \psi(\theta)$, nous nous servirons de cette valeur de i pour calculer la surface de la flottaison oblique A_n, son moment M_n par rapport à la génératrice de contact du cylindre enveloppe, son moment d'inertie $\mathfrak{I}_n$ par rapport au même axe, le volume de la carène oblique V_n, etc.

Pour tous ces problèmes, comme nous le verrons, il sera nécessaire de calculer aussi i^2 et i^3, ou plutôt leurs développements en fonction de θ, c'est-à-dire leurs dérivées à l'origine des divers ordres par rapport à θ, $\left(\frac{d^p i^2}{d\theta^p}\right)_0$ et $\left(\frac{d^p i^3}{d\theta^p}\right)_0$. Cherchons donc, dès maintenant, ces expressions, en profitant des relations générales connues

$$\frac{di^2}{d\theta} = 2i\,\frac{di}{d\theta}, \qquad \frac{d^2 i^2}{d\theta^2} = 2\left(\frac{di}{d\theta}\right)^2 + 2i\,\frac{d^2 i}{d\theta^2}, \qquad \ldots,$$

$$\frac{di^3}{d\theta} = 3i^2\frac{di}{d\theta}, \qquad \frac{d^2 i^3}{d\theta^2} = 6i\left(\frac{di}{d\theta}\right)^2 + 3i^2\frac{d^2 i}{d\theta^2}, \qquad \ldots.$$

En faisant $\theta = 0$, il vient $i_0 = y_0$, puis

$$(\alpha') \qquad \frac{1}{2}\left(\frac{di^2}{d\theta}\right)_0 = y_0\left(\frac{di}{d\theta}\right)_0 = \frac{1}{3}\left(\frac{dy^3}{dz}\right)_0 - r_0 y_0,$$

$$(\beta') \quad \begin{cases} \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{d^2 i^2}{d\theta^2}\right)_0 = \left(\dfrac{di}{d\theta}\right)_0^2 + y_0\left(\dfrac{d^2 i}{d\theta^2}\right)_0 \\ \qquad = \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{d^2 y^4}{dz^2}\right)_0 - \dfrac{3}{2} r_0 \left(\dfrac{dy^2}{dz}\right)_0 + y_0^2 + r_0^2 - r'_0 y_0, \end{cases}$$

$$(\gamma') \quad \begin{cases} \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{d^3 i^2}{d\theta^3}\right)_0 = \ldots = \dfrac{1}{5}\left(\dfrac{d^3 y^5}{dz^3}\right)_0 - 2 r_0 \left(\dfrac{d^2 y^3}{dz^2}\right)_0 + \dfrac{8}{3}\left(\dfrac{dy^3}{dz}\right)_0 - 2 r'_0 \left(\dfrac{dy^2}{dz}\right)_0 \\ \qquad + 3 r_0^2 \left(\dfrac{dy}{dz}\right)_0 - (5 r_0 + r''_0) y_0 + 3 r_0 r'_0 \end{cases}$$

et

$$(\alpha'') \qquad \frac{1}{3}\left(\frac{di^3}{d\theta}\right)_0 = y_0^2\left(\frac{di}{d\theta}\right)_0 = \frac{1}{4}\left(\frac{dy^4}{dz}\right)_0 - r_0 y_0^2$$

$$(\beta'') \quad \begin{cases} \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{d^2 i^3}{d\theta^2}\right)_0 = 2 y_0 \left(\dfrac{di}{d\theta}\right)_0^2 + y_0^2\left(\dfrac{d^2 i}{d\theta^2}\right)_0 \\ \qquad = \dfrac{1}{5}\left(\dfrac{d^2 y^5}{dz^2}\right)_0 - \dfrac{5}{3} r_0 \left(\dfrac{dy^3}{dz}\right)_0 + y_0^3 - r'_0 y_0^2 + 2 r_0^2 y_0, \end{cases}$$

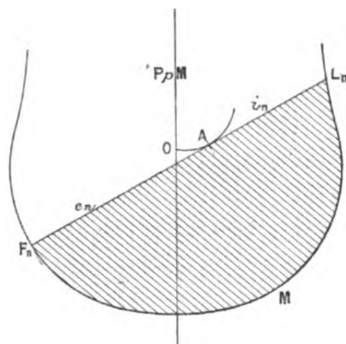
$$(\gamma'') \quad \begin{cases} \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{d^3 i^3}{d\theta^3}\right)_0 = \ldots = \dfrac{1}{6}\left(\dfrac{d^3 y^6}{dz^3}\right)_0 - \dfrac{9}{4} r_0 \left(\dfrac{d^2 y^4}{dz^2}\right)_0 + \dfrac{11}{4}\left(\dfrac{dy^4}{dz}\right)_0 - \dfrac{7}{3} r'_0 \left(\dfrac{dy^3}{dz}\right)_0 \\ \qquad + 6 r_0^2 \left(\dfrac{dy^2}{dz}\right)_0 - 8 r_0 y_0^2 - r''_0 y_0^2 + 6 r_0 r'_0 y_0 - 2 r_0^3. \end{cases}$$

De tous ces calculs, il résulte que toutes les dérivées successives à l'origine par rapport à θ, soit de i, soit de i^2, soit de i^3, sont des expressions ne contenant qu'au premier degré les dérivées successives à l'origine par rapport à z soit de y, soit des puissances de y. Autrement dit, les dérivées de i ou des puissances de i à l'origine par rapport à θ sont linéaires relativement aux dérivées à l'origine de y ou des puissances de y par rapport à z. M. Simart a, d'ailleurs, démontré, d'une façon générale, en appliquant la formule de Lagrange (¹), que les $\left(\dfrac{d^n i^k}{d\theta^n}\right)_0$ ne devaient contenir les termes $\left(\dfrac{d^{n'} y^{k'}}{dz^{n'}}\right)_0$ qu'au premier degré.

(¹) GUYOU et SIMART, *Développements de géométrie du navire*; 1887. (*Mémoires présentés par divers savants à l'Académie des Sciences*, t. XXX.)

Volume d'une carène oblique V_θ, *tangente au cylindre fixe* OA. — Soit (*fig.* 118), sur un couple, la trace du cylindre quelconque OA servant d'enveloppe à des flottaisons. La flottaison

Fig. 118.



$F_n L_n$, tangente à ce cylindre et inclinée d'un angle θ sur l'horizon, détache dans le couple considéré une aire $F_n M L_n$ que nous désignerons par S_θ.

Or nous connaissons la différentielle de cette aire par rapport à θ, en fonction des ordonnées i et e comptées à partir de A. On a, en effet,

$$dS_\theta = \tfrac{1}{2} i^2 d\theta - \tfrac{1}{2} e^2 d\theta,$$

c'est-à-dire

$$(a) \qquad \frac{dS_\theta}{d\theta} = \frac{1}{2}(i^2 - e^2).$$

On aura donc les dérivées successives des divers ordres de S_θ par (a) :

$$\frac{d^2 S_\theta}{d\theta^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{di^2}{d\theta} - \frac{de^2}{d\theta}\right),$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$

$$\frac{d^m S_\theta}{d\theta^m} = \frac{1}{2}\left(\frac{d^{m-1} i^2}{d\theta^{m-1}} - \frac{d^{m-1} e^2}{d\theta^{m-1}}\right).$$

En faisant $\theta = 0$ et remplaçant les dérivées successives à l'origine de i^2 et de e^2 par les valeurs que nous avons trouvées, nous obtiendrons, à l'aide des quantités données, r_0, $r_0^{(q)}$, y_0, $\left(\frac{d^n y^k}{dz^n}\right)_0$, les dérivées successives à l'origine de S_θ, c'est-à-dire les coefficients du développement de l'expression S_θ en fonction de θ.

Nous remarquerons que les formules donnant les dérivées successives de i, de i^2, de i^3, ..., sont générales et donnent aussi bien celles de e, de e^2, de e^3, ..., à condition de supposer que l'ordonnée inclinée positive i est remplacée par l'ordonnée inclinée négative e et que l'ordonnée horizontale positive y est remplacée par l'ordonnée horizontale négative y'.

Or, comme on compte d'habitude les e et les y' positivement, nous devrons, dans les formules relatives à i, changer i (et ses puissances impaires, i^3, i^5, ...) en $-e$, $-e^3$, $-e^5$, ..., et y (et ses puissances impaires y^3, y^5, ...) en $-y'$, $-y'^3$, $-y'^5$, ..., pour les mettre d'accord avec les règles acceptées en architecture navale, quand on voudra en déduire les dérivées de e.

Nous trouverons ainsi :

$$\left(\frac{dS}{d\theta}\right)_0 = \frac{1}{2}(y_0^2 - y_0'^2),$$

$$\left(\frac{d^2 S}{d\theta^2}\right)_0 = -r_0(y_0 + y'_0) + \left(\frac{d}{dz}\,\frac{y^3 + y'^3}{3}\right)_0,$$

$$\left(\frac{d^3 S}{d\theta^3}\right)_0 = -r'_0(y_0 + y'_0) - 3r_0\left(\frac{d}{dz}\,\frac{y^2 - y'^2}{2}\right)_0 + y_0^2 - y_0'^2 + \left(\frac{d^2}{dz^2}\,\frac{y^4 - y'^4}{4}\right)_0$$

$$\begin{aligned}\left(\frac{d^4 S}{d\theta^4}\right)_0 = &-r''_0(y_0 + y'_0) - 4r'_0\left(\frac{d}{dz}\,\frac{y^2 - y'^2}{2}\right)_0 \\ &- 5r_0(y_0 + y'_0) - 6r_0\left(\frac{d^2}{dz^2}\,\frac{y^3 + y'^3}{3}\right)_0 \\ &+ 3r_0^2\left(\frac{d}{dz}\,\frac{y + y'}{1}\right)_0 + 8\left(\frac{d}{dz}\,\frac{y^3 + y'^3}{3}\right)_0 + \left(\frac{d^3}{dz^3}\,\frac{y^5 + y'^5}{5}\right)_0,\end{aligned}$$

d'où enfin nous déduirons

$$S_\theta = S_0 + \frac{\theta}{1}\left(\frac{dS}{d\theta}\right)_0 + \frac{\theta^2}{1.2}\left(\frac{d^2 S}{d\theta^2}\right)_0 + \ldots + \frac{\theta^n}{1.2\ldots n}\left(\frac{d^n S}{d\theta^n}\right)_0.$$

Quand on passe d'un couple à un autre, les coefficients r_0, r'_0, r''_0 qui dépendent de la courbe fixe OA restent constants; mais y_0, y'_0 et les dérivées à l'origine de y et y' par rapport à z sont variables.

La détermination de S_θ conduit de suite à celle du volume V_θ de

la carène oblique en fonction de θ; car on sait que

$$V_\theta = \int_{N}^{R} S_\theta\, dx = \int_{N}^{R} S_0\, dx + \frac{\theta}{1}\int_{N}^{R}\left(\frac{dS}{d\theta}\right)_0 dx$$
$$+ \frac{\theta^2}{1.2}\int_{N}^{R}\left(\frac{d^2S}{d\theta^2}\right)_0 dx + \ldots + \frac{\theta^n}{1.2\ldots n}\int_{N}^{R}\left(\frac{d^nS}{d\theta^n}\right)_0 dx.$$

Mais, d'autre part, on peut aussi écrire le développement de V_θ comme suit

$$V_\theta = V_0 + \frac{\theta}{1}\left(\frac{dV}{d\theta}\right)_0 + \frac{\theta^2}{1.2}\left(\frac{d^2V}{d\theta^2}\right)_0 + \ldots + \frac{\theta^n}{1.2\ldots n}\left(\frac{d^nV}{d\theta^n}\right)_0;$$

d'où la série des valeurs des dérivées à l'origine de V_θ en fonction des quantités connues $r_0, r'_0, r''_0, y_0, y'_0, \left(\frac{d^n y^p}{dz^n}\right)_0, \left(\frac{d^n y'^p}{dz^n}\right)_0$, par

$$V_0 = \int_{N}^{R} S_0\, dx,$$
$$\left(\frac{dV}{d\theta}\right)_0 = \int_{N}^{R}\left(\frac{dS}{d\theta}\right)_0 dx,$$
$$\left(\frac{d^2V}{d\theta^2}\right)_0 = \int_{N}^{R}\left(\frac{d^2S}{d\theta^2}\right)_0 dx,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Appelons donc A_p les expressions de la forme $\frac{y^p - (-y')^p}{p}\,dx$, les résultats des substitutions seront

$$\left(\frac{dV}{d\theta}\right)_0 = (A_2)_0,$$
$$\left(\frac{d^2V}{d\theta^2}\right)_0 = -r_0(A_1)_0 + \left(\frac{d}{dz}A_3\right)_0,$$
$$\left(\frac{d^3V}{d\theta^3}\right)_0 = -r'_0(A_1)_0 + 2(A_2)_0 - 3r_0\left(\frac{d}{dz}A_2\right)_0 + \left(\frac{d^2}{dz^2}A_4\right)_0,$$
$$\left(\frac{d^4V}{d\theta^4}\right)_0 = -r''_0(A_1)_0 - 4r'_0\left(\frac{d}{dz}A_2\right)_0 - 5r_0(A_1)_0$$
$$-6r_0\left(\frac{d^2}{dz^2}A_3\right)_0 + 3r_0^2\left(\frac{d}{dz}A_1\right)_0 + 8\left(\frac{d}{dz}A_3\right)_0 + \left(\frac{d^3}{dz^3}A_5\right)_0.$$

Tels seront les coefficients en termes connus des coefficients du développement de V_θ que nous nous proposions de trouver.

Cas où les murailles du navire sont symétriques ainsi que le cylindre OA *par rapport au longitudinal.* — La symétrie par rapport au longitudinal des murailles du navire et de la section OA

du cylindre enveloppe introduit dans l'expression de V_θ des simplifications notables. De la symétrie des murailles, il résulte que toutes les quantités A d'indice pair sont nulles; et, de la symétrie de la courbe OA, on conclut que les rayons initiaux $r'_0, r'''_0, r^{\text{v}}_0$ des développées d'ordre pair sont également nuls. En effet, la courbe OA et ses développées d'ordre impair sont alors orthogonales à l'axe de symétrie et possèdent sur cet axe un rayon de courbure r_0, r''_0, r^{iv}_0, ..., maximum ou minimum; on aura donc $\left(\frac{dr}{d\theta}\right)_0 = r'_0 = 0$, $\left(\frac{dr''}{d\theta}\right)_0 = r'''_0 = 0, \ldots.$

Ces simplifications introduites dans les valeurs des dérivées successives de V_θ à l'origine entraînent la nullité des dérivées $\left(\frac{d^nV}{d\theta^n}\right)_0$ d'ordre impair, en sorte que l'expression de V_θ devient

$$V_\theta = V_0 + \frac{\theta^2}{1.2}\left(\frac{d^2V}{d\theta^2}\right)_0 + \frac{\theta^4}{1.2.3.4}\left(\frac{d^4V}{d\theta^4}\right)_0 + \ldots + \frac{\theta^{2n}}{2n!}\left(\frac{d^{2n}V}{d\theta^{2n}}\right)_0.$$

En s'arrêtant au terme d'ordre $2n$, l'approximation sera des termes de l'ordre $2n+2$.

Détermination des rayons successifs de la courbe OA *quand celle-ci est l'enveloppe de flottaisons isocarènes dans un navire à murailles symétriques.* — Dans ce cas, toutes les conditions ci-dessus sont remplies et l'on a de plus

$$V_\theta = \text{const.} = V_0,$$

c'est-à-dire, en désignant par $\mathfrak{r}_0$, $\mathfrak{r}'_0$, $\mathfrak{r}''_0$ les rayons initiaux de la courbe OA enveloppe des flottaisons *isocarènes,*

$$\left(\frac{d^2V}{d\theta^2}\right)_0 = 0 \quad \text{ou} \quad -\mathfrak{r}_0(A_1)_0 + \left(\frac{d}{dz}A_3\right)_0 = 0,$$

$$\left(\frac{d^4V}{d\theta^4}\right)_0 = 0 \quad \text{ou} \quad -\mathfrak{r}''_0(A_1)_0 - 5\mathfrak{r}_0(A_1)_0 - 6\mathfrak{r}_0\left(\frac{d^2}{dz^2}A_3\right)_0$$
$$+ 3\mathfrak{r}_0^2\left(\frac{d}{dz}A_1\right)_0 + 8\left(\frac{d}{dz}A_3\right)_0 + \left(\frac{d^3}{dz^3}A_5\right)_0 = 0,$$

....,

$$\left(\frac{d^{2n}V}{d\theta^{2n}}\right)_0 = 0.$$

Ces relations permettront de calculer en fonction des données de la forme des murailles les rayons successifs initiaux $\mathfrak{r}_0$, $\mathfrak{r}'_0$, $\mathfrak{r}''_0$

de la courbe OA, quand elle sera définie comme enveloppe de flottaisons isocarènes.

Cas où la courbe OA *se réduit au point* O. *Volumes* V_θ *isobathes.* — La courbe OA réduite à un point est caractérisée par ce fait que ses rayons successifs, quels qu'ils soient, sont nuls; on a donc non seulement

$$r'_0 = r'''_0 = r^{\text{v}}_0 = \ldots = 0,$$

mais encore

$$r_0 = r''_0 = r^{\text{iv}}_0 = \ldots = 0.$$

Les coefficients $\left(\dfrac{d^{2n}V}{d\theta^{2n}}\right)_0$ pour une carène à murailles symétriques se simplifient donc encore et deviennent

$$\left(\frac{d^2V}{d\theta^2}\right)_0 = \left(\frac{d}{dz}A_3\right)_0,$$

$$\left(\frac{d^4V}{d\theta^4}\right)_0 = 8\left(\frac{d}{dz}A_3\right)_0 + \left(\frac{d^3}{dz^3}A_5\right)_0.$$

Ce sont ceux qu'il convient d'introduire dans le développement de V_θ pour avoir l'expression des volumes isobathes en fonction de θ.

Tracé d'une isocarène inclinée d'un angle θ *donné.* — Il y a deux façons de traiter le problème :

1° On peut tracer la section OA du cylindre enveloppe des isocarènes, puisque, la forme des murailles étant donnée, on en

Fig. 119.

peut déduire, comme nous venons de le voir, les rayons successifs de cette section. Supposons donc déterminés les rayons $\mathfrak{r}_0, \mathfrak{r}''_0, \mathfrak{r}^{\text{iv}}_0, \ldots$ Nous porterons sur Oz (*fig.* 119) une longueur O$a = \mathfrak{r}_0$

dans le sens de O vers z si $\mathfrak{r}_0$ est positif. En a, nous mènerons aV faisant avec az l'angle $+\frac{\pi}{2}$, et nous porterons sur aV le $\mathfrak{r}'_0$ positif; pour des murailles symétriques, $\mathfrak{r}'_0$ étant nul, on retrouve après cette opération le point a lui-même. En ce point a nous mènerons maintenant az', faisant avec aV l'angle $+\frac{\pi}{2}$, et nous porterons de a vers z' le $\mathfrak{r}''_0$ positif, d'où le point b, origine de la développée D''. En b, nous mènerons bV', faisant l'angle $+\frac{\pi}{2}$ avec bz', et nous porterons sur bV' le $\mathfrak{r}'''_0$ positif, qui est nul pour des murailles symétriques, et ainsi de suite. Quand on aura ainsi marqué le centre de courbure initial, c par exemple, correspondant au dernier terme du développement de σ, on supposera que les développées subséquentes se réduisent au point c, c'est-à-dire que toutes les dérivées successives de cb par rapport à θ sont constamment nulles, c'est-à-dire encore que cb est constant. Du point c comme centre, on mènera donc l'arc de cercle bD''', on prendra ensuite sa développante bD'', puis la développante aD' de bD'', puis la développante aD de aD', puis enfin la développante de aD. Cette dernière développante aura pour équation

$$\sigma = \mathfrak{r}_0\theta + \mathfrak{r}''_0 \frac{\theta^3}{1.2.3} + \mathfrak{r}^{\text{IV}}_0 \frac{\theta^5}{1.2\ldots5},$$

c'est-à-dire coïncidera avec la courbe OA dont l'équation est $\sigma_1 = \psi(\theta)$, si, dans ψ, on peut négliger tous les termes au-dessus de θ^5, ou autrement dit si le coefficient $\mathfrak{r}^{\text{VI}}_0$ et les suivants sont très petits, ou si, ces coefficients $\mathfrak{r}^{\text{VI}}_0$ étant grands, l'angle θ considéré reste assez petit pour que ses puissances au-dessus de la cinquième demeurent négligeables. La courbe obtenue a avec l'enveloppe isocarène OA un contact du septième ordre, si le développement de son arc σ s'arrête au terme en θ^5.

2° On peut aussi (*fig.* 120) calculer la distance OD au point O du point D où la flottaison isocarène inclinée de θ coupe la flottaison droite, en supposant déterminés au préalable les rayons $\mathfrak{r}_0$, $\mathfrak{r}''_0$, $\mathfrak{r}^{\text{IV}}_0$.

Nous avons, en appelant $\text{OD} = \delta$, $\text{OB} = \tau_1$, $\text{AB} = \zeta$ et arc $\text{OA} = \sigma$,

(1) $$\delta = \tau_1 - \zeta \cot\theta$$

et

$$(2) \qquad d\eta = d\sigma\cos\theta, \qquad d^2\eta = d^2\sigma\cos\theta - d\sigma\, d\theta\sin\theta,$$

$$(3) \qquad d\zeta = d\sigma\sin\theta, \qquad d^2\zeta = d^2\sigma\sin\theta + d\sigma\, d\theta\cos\theta,$$

c'est-à-dire

$$\frac{d\eta}{d\theta} = \mathfrak{r}\cos\theta, \qquad \frac{d^2\eta}{d\theta^2} = \mathfrak{r}'\cos\theta - \mathfrak{r}\sin\theta,$$

$$\frac{d\zeta}{d\theta} = \mathfrak{r}\sin\theta, \qquad \frac{d^2\zeta}{d\theta^2} = \mathfrak{r}'\sin\theta + \mathfrak{r}\cos\theta.$$

Fig. 120.

Si nous différentions maintenant (1) en ayant égard à (2) et (3), nous aurons

$$\frac{d\delta}{d\theta}\sin^2\theta = \zeta,$$

$$\frac{d^2\delta}{d\theta^2}\sin\theta + 2\frac{d\delta}{d\theta}\cos\theta = \mathfrak{r},$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots \quad \dots\dots\dots$$

On fera ensuite $\theta = 0$, en remarquant que $\zeta_0 = 0$, et l'on obtiendra

$$\left(\frac{d\delta}{d\theta}\right)_0 = \frac{\mathfrak{r}_0}{2}, \quad \left(\frac{d^2\delta}{d\theta^2}\right)_0 = \frac{\mathfrak{r}'_0}{3}, \quad \left(\frac{d^3\delta}{d\theta^3}\right)_0 = \frac{\mathfrak{r}_0 + \mathfrak{r}''_0}{4}, \quad \left(\frac{d^4\delta}{d\theta^4}\right)_0 = \frac{7\,\mathfrak{r}'_0 + 3\,\mathfrak{r}'''_0}{15}.$$

Dans le cas de murailles symétriques pour lesquelles $\mathfrak{r}'_0$, $\mathfrak{r}'''_0$, ... sont nuls, on a finalement,

$$\delta = \theta\,\frac{\mathfrak{r}_0}{2} + \frac{\theta^3}{1.2.3}\,\frac{\mathfrak{r}_0 + \mathfrak{r}''_0}{4}.$$

3° On peut enfin, en suivant une marche identique, calculer la distance OF, que nous appellerons d. On a, en effet,

$$d = -\zeta + \eta\,\mathrm{tang}\,\theta.$$

Pour des murailles symétriques, on arriverait au développement

$$d = \frac{\theta^2}{1.2}\,\mathrm{r}_0 + \frac{\theta^4}{4!}\,(\mathrm{r}_0'' + 5\,\mathrm{r}_0) + \frac{\theta^6}{6!}\,(\mathrm{r}_0^{\mathrm{IV}} + 14\,\mathrm{r}_0'' + 61\,\mathrm{r}_0).$$

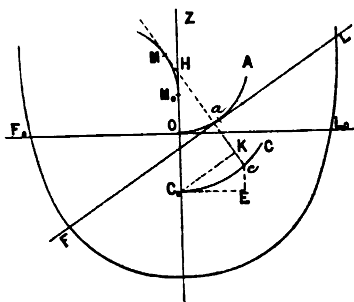
Équation de la courbe des centres de carène isocarènes, C_0C, en projection sur le maître couple. — Pour des murailles symétriques, la courbe C_0C part, comme la courbe OA, d'un point C_0 de Oz et s'éloigne orthogonalement à Oz. Pour distinguer les deux courbes, nous donnerons la lettre r aux rayons de courbure des développées successives de C_0C, en conservant la lettre $\mathfrak{r}$ aux rayons de OA. L'équation de C_0C sera

$$s = \mathrm{r}_0\theta + \mathrm{r}_0'\frac{\theta^2}{2!} + \mathrm{r}_0''\frac{\theta^3}{3!} + \ldots.$$

Le problème consiste à trouver les valeurs des rayons r_0, r_0', r_0''; car, ces rayons connus, on pourra tracer C_0C par la méthode des développantes, que nous avons employée tout à l'heure pour construire OA.

Si nous supposons que OA soit la courbe enveloppe de flottaisons isocarènes, une flottaison isocarène inclinée quelconque FL (*fig.* 121) touchera cette courbe en un point a qui sera la projec-

Fig. 121.



tion du centre de gravité de son aire. Dès lors, le moment d'inertie $\mathfrak{I}_0$ de cette flottaison FL par rapport à un axe parallèle au longitudinal et passant par son centre de gravité sera

$$\mathfrak{I}_0 = \frac{1}{3}\int_{\mathcal{N}}^{\mathcal{R}} [i^3 - (-e)^3]\,dx = \frac{1}{3}\int_{\mathcal{N}}^{\mathcal{R}} (i^3 + e^3)\,dx.$$

Or nous apprendrons en Géométrie que le rayon de courbure r_θ de C_0C au point c correspondant a pour expression

$$r_\theta = \frac{\mathfrak{J}_\theta}{V_\theta} = \frac{1}{3V_0}\int_{\mathcal{N}}^{\mathcal{R}} (i^3 + e^3)\,dx\,;$$

d'où

$$\frac{d^n r_\theta}{d\theta^n} = \frac{1}{3V_0}\int_{\mathcal{N}}^{\mathcal{R}} \left(\frac{d^n i^3}{d\theta^n} + \frac{d^n e^3}{d\theta^n}\right) dx$$

et, par suite,

$$\left(\frac{d^n r}{d\theta^n}\right)_0 = \frac{1}{3V_0}\int_{\mathcal{N}}^{\mathcal{R}} \left(\frac{d^n i^3}{d\theta^n} + \frac{d^n e^3}{d\theta^n}\right)_0 dx.$$

Or nous avons appris à calculer $\left(\frac{d^n i^3}{d\theta^n}\right)_0$ et $\left(\frac{d^n e^3}{d\theta^n}\right)_0$ en fonction des $\mathfrak{r}_0$ et des $\left(\frac{d^m y^k}{dz^m}\right)_0$; nous aurons donc l'équation de la courbe C_0C, développée en fonction des mêmes éléments, comme suit,

$$s = r_0\theta + r'_0\frac{\theta^2}{2!} + \ldots + r_0^{n-1}\frac{\theta^n}{n!},$$

avec

$$r_0 = \frac{1}{V_0}(A_3)_0,$$

$$r''_0 = 3r_0 - \frac{3}{V_0}\mathfrak{r}_0^2(A_1)_0 + \frac{1}{V_0}\left(\frac{d^2}{dz^2}A_5\right)_0,$$

$$r^{\text{IV}}_0 = 26\,r''_0 - 45\,r_0 - \frac{15}{V_0}\mathfrak{r}_0\left(\frac{d^3}{dz^3}A_5\right)_0 + \frac{45}{V_0}\mathfrak{r}_0^2\left(\frac{d^2}{dz^2}A_3\right)_0$$
$$- \frac{15}{V_0}\mathfrak{r}_0^3\left(\frac{d}{dz}A_1\right)_0 + \frac{1}{V_0}\left(\frac{d^4}{dz^4}A_7\right)_0,$$

en nous bornant au cas des murailles symétriques pour lesquelles les r'_0, r'''_0, ..., d'ordre impair, sont nuls.

Calcul des bras de levier isocarènes, $\varphi_{0,n}$ (*fig.* 121). — On voit sur la figure que le bras de levier isocarène, $\varphi_{0,n}$, mesuré en C_0K à partir de l'origine fixe C_0, a pour valeur

$$(1)\qquad \varphi_{0,n} = \overline{C_0H}\sin\theta = h_\theta \sin\theta,$$

en appelant h_θ la hauteur métacentrique $\overline{C_0H}$, mesurée sur l'axe C_0Z. Le problème est donc ramené au calcul de h_θ. Or, en désignant par η' et ζ', les coordonnées cE et C_0E du point c par rapport aux axes rectangulaires passant en C_0, on voit que

$$h_\theta = \zeta' + \eta'\cot\theta,$$

d'où

$$dh = d\zeta' + d\eta' \cot\theta - \frac{\eta'\, d\theta}{\sin^2\theta};$$

mais

$$d\eta' = ds \cos\theta,$$

$$d\zeta' = ds \sin\theta,$$

donc

$$(a) \qquad \frac{dh}{d\theta} = \frac{\mathrm{r} \sin\theta - \eta'}{\sin^2\theta}.$$

En différentiant successivement la relation (a) et faisant $\theta = 0$, on aura les coefficients du développement de h en fonction de θ. On remarquera aussi que $h_0 = \mathrm{r}_0$ dans ce développement qui s'écrit :

$$h = \mathrm{r}_0 + \frac{\theta^2}{2!}\frac{\mathrm{r}''_0}{3} + \frac{\theta^4}{4!}\frac{3\mathrm{r}^{\mathrm{IV}}_0 + 7\mathrm{r}''_0}{15} + \frac{\theta^6}{6!}\frac{3\mathrm{r}^{\mathrm{VI}}_0 + 18\mathrm{r}^{\mathrm{IV}}_0 + 31\mathrm{r}''_0}{21}.$$

Connaissant les coefficients $\left(\frac{d^n h}{d\theta^n}\right)_0$, on aura facilement ceux du développement de $\varphi_{0,n}$ en différentiant la relation (1), et l'on arrivera enfin à

$$\varphi_{0,n} = \theta\,\mathrm{r}_0 + \frac{\theta^3}{3!}(\mathrm{r}''_0 - \mathrm{r}_0) + \frac{\theta^5}{5!}(\mathrm{r}^{\mathrm{IV}}_0 - \mathrm{r}''_0 + \mathrm{r}_0)$$
$$+ \frac{\theta^7}{7!}(\mathrm{r}^{\mathrm{VI}}_0 - \mathrm{r}^{\mathrm{IV}}_0 + 29\,\mathrm{r}''_0 - 7\,\mathrm{r}_0).$$

Disposition des Tableaux de calculs pour l'application de la méthode Guyou et Simart. — Nous avons vu que la courbe OA enveloppe des flottaisons isocarènes et C_0C des centres de carène isocarènes se déterminent au moyen des données de la forme des murailles, c'est-à-dire au moyen des dérivées $\left(\frac{d^n y^k}{dz^n}\right)_0$ à l'origine ou sur le plan horizontal de la flottaison droite initiale. Or le calcul de ces dérivées exige l'emploi de lignes d'eau droites équidistantes réparties au-dessus et au-dessous de F_0L_0. Plus on voudra une approximation élevée pour les éléments de OA et de C_0C, plus l'ordre n des dérivées à employer s'élèvera et plus il faudra employer de ces lignes d'eau auxiliaires; ainsi pour C_0C, si l'on veut limiter son expression à un terme $s = \mathrm{r}_0\theta$, c'est-à-dire l'assimiler à un cercle, il suffira de calculer r_0, et, pour cela, il suffira d'employer la seule flottaison droite F_0L_0. Si l'on veut calculer une courbe plus rapprochée de la courbe véritable, telle que

$s = \mathrm{r}_0\theta + \mathrm{r}''_0 \frac{\theta^3}{3!}$, il faudra une ligne d'eau au-dessus et une au-dessous de F_0L_0. Si enfin on veut avoir une courbe calculée $s = \mathrm{r}_0\theta + \mathrm{r}''_0 \frac{\theta^3}{3!} + \mathrm{r}^{\text{iv}}_0 \frac{\theta^5}{5!}$, il faudra deux lignes d'eau au-dessus et deux au-dessous, et ainsi de suite. De plus, quand on n'emploie que F_0L_0 (un seul terme), on n'a besoin que des sommes des cubes des ordonnées de cette flottaison; quand on emploie une ligne au-dessus et une au-dessous, on a besoin des cinquièmes puissances; quand on emploie deux lignes au-dessus et deux au-dessous, on a besoin des septièmes puissances, etc.

On s'arrête aux trois premiers termes des développements, c'est-à-dire qu'on prend deux lignes d'eau au-dessus et deux au-dessous de F_0L_0. On les numérote (1), (2), (3), (4) et (5) à partir de la plus basse. La région de la coque comprise entre (1) et (5) doit être continue. Quels que soient par ailleurs le nombre des termes de s calculés et l'approximation de cette courbe, le point correspondant à la flottaison isocarène qui atteint le plat-bord limitera toujours la portion utile de cette courbe, puisqu'au delà les formules ne sont plus applicables.

Il y a intérêt pour la précision des termes calculés à ce que les lignes d'eau équidistantes ne soient pas trop éloignées l'une de l'autre; l'équidistance $\Delta z = h'$ de ces lignes sera réglée par la courbure plus ou moins grande des murailles aux environs de la flottaison droite F_0L_0.

Tableau I. — Dans ce Tableau on calcule les intégrales $(A_1)_0$, $(A_3)_0$, $(A_5)_0$ et $(A_7)_0$, nécessaires à la détermination des $\mathfrak{r}_0$ et des r_0. Leur expression générale est

$$(A_p)_0 = \frac{1}{p}\int_{N}^{Æ} [y^p - (-y')^p]_0 \, dx \quad \text{ou} \quad \frac{1}{p}\int_{N}^{Æ} [y_0^p - (-y'_0)^p] \, dx,$$

c'est-à-dire pour les valeurs impaires de p, seules nécessaires à considérer,

$$\frac{1}{p}\int_{N}^{Æ} (y_0^p + y_0'^p)\, dx = \frac{2}{p}\int_{N}^{Æ} y_0^p \, dx,$$

à cause de la symétrie des couples.

A gauche du Tableau, une première colonne indique le numérotage des couples de 10 N à 10 Æ. Comme les calculs sont faits en employant la méthode des trapèzes, on inscrit dans les rangées

extrêmes $\frac{1}{2}$ 10 $\mathcal{N}$ et $\frac{1}{2}$ 10 $\mathcal{R}$, pour indiquer que les ordonnées extrêmes doivent être remplacées par leurs moitiés. Le Tableau est ensuite partagé en cinq travées correspondant aux cinq lignes d'eau droites; les travées extrêmes (1) et (5) ne renferment que trois colonnes (ordonnées, cinquièmes puissances, septièmes puissances), les trois autres renferment quatre colonnes (ordonnées, cubes, cinquièmes puissances, septièmes puissances). Les cubes, cinquièmes et septièmes puissances sont pris dans des Tables spéciales préparées par MM. Guyou et Simart. Pour avoir une erreur relative constante, si l'on prend les ordonnées au centimètre près (deux décimales), il faudra prendre et inscrire dans les colonnes les cubes au décimètre près (une décimale), les cinquièmes puissances à l'unité près (pas de décimale), et les septièmes puissances à la dizaine près (pas de dernier chiffre significatif). Il sera dès lors inutile de marquer dans ce Tableau la virgule indiquant la place de l'unité, cette rectification devant être faite par la suite.

La somme d'une colonne s'écrit en employant le symbole de la règle d'intégration des trapèzes,

$$\sum_{\mathcal{N}}^{\mathcal{R}} y_0^p.$$

On a donc

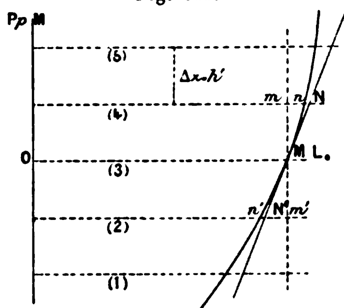
$$(\mathrm{A}_p)_0 = \frac{2}{p}\int_{\mathcal{N}}^{\mathcal{R}} y_0^p\,dx = \frac{2\lambda}{p}\sum_{\mathcal{N}}^{\mathcal{R}} y_0^p.$$

On fait cette opération, et l'on en inscrit le résultat sous la somme $\sum$ correspondante.

Tableau II. — Ce Tableau est réservé au calcul des dérivées $\left(\frac{d^n}{dz^n}\mathrm{A}_p\right)_0$. Dans la colonne indépendante de gauche, on inscrit le numérotage (5), (4), (3), (2) et (1) des lignes d'eau employées. Dans la première colonne, on inscrit les valeurs de (A_1) aux lignes d'eau (4), (3), (2); dans la deuxième, les valeurs de (A_3) aux lignes d'eau (4), (3), (2); dans la troisième, celles de (A_5) aux lignes d'eau (5), (4), (3), (2), (1), et dans la quatrième, celles de (A_7) aux lignes d'eau (5), (4), (3), (2), (1). Une large colonne spéciale, à droite, contient les formules symboliques pour le calcul des différences Δ^n jusqu'à celles du quatrième ordre inclusivement.

Pour avoir la différentielle $m\mathrm{N}$ (*fig.* 122), on prend la moyenne des différences mn et $m'n'$ de part et d'autre de la flottaison initiale OL_0 ou (3).

Fig. 122.



On a donc

$$(\Delta^1 \mathrm{A}_p)_0 = \frac{(\mathrm{A}_p)_4 - (\mathrm{A}_p)_3 + (\mathrm{A}_p)_3 - (\mathrm{A}_p)_2}{2} = \frac{(\mathrm{A}_p)_4 - (\mathrm{A}_p)_2}{2}$$

ou symboliquement

$$(\Delta^1 \mathrm{A}_p)_0 = \frac{(4)_p - (2)_p}{2},$$

et ainsi de suite pour les différences d'ordre plus élevé.

Pour la commodité des écritures, on emploie, non pas la notation $(\mathrm{A}_p)_4$ pour indiquer la valeur de A_p à la ligne d'eau (4), mais bien $\mathrm{A}_p^{\mathrm{iv}}$.

En divisant maintenant la différence $(\Delta^n \mathrm{A}_p)_0$ (ou $\Delta^n \mathrm{A}_p'''$) par la puissance $n^{\text{ième}}$ de h' ou Δz, distance verticale des lignes d'eau auxiliaires, on aura la valeur approchée de la dérivée $\left(\frac{d^n \mathrm{A}_p}{dz^n}\right)_0$. Ces calculs s'effectuent par logarithmes. On donne aux dérivées les signes des différences Δ.

Tableau III. — Ce Tableau contient le calcul des $\mathfrak{r}_0$ et celui des r_0; on y trouve ensuite les formules des développements : 1° de l'arc σ de la courbe enveloppe des flottaisons isocarènes; 2° de l'arc s de la courbe des centres de carène isocarènes; 3° de la distance d, utile pour le tracé des flottaisons isocarènes; 4° du bras de levier isocarène $\varphi_{0,n}$ par rapport au centre de la carène droite initiale. Dans ces formules, les résultats seront obtenus au centimètre près, en faisant usage, comme il est indiqué, du centimètre pour exprimer $\mathfrak{r}_0$, du décimètre pour $\mathfrak{r}_0''$, du centimètre pour r_0, du décimètre pour r_0'', du mètre pour $\mathrm{r}_0^{\mathrm{iv}}$.

L (¹)

CALCUL DES ÉLÉMENTS GÉOMÉTRIQUES

(Méthode d

Calculs relatifs aux isocarènes de la carène droit

Volume constant des isocarènes $V_0 =$
Intervalle horizontal des couples de tracé $\lambda =$

NUMÉROS des couples.	LIGNE D'EAU AUXILIAIRE N° 1. Ordonnées (Centimètres).	LIGNE D'EAU AUXILIAIRE N° 1. 5ᵉ puissance (Unités).	LIGNE D'EAU AUXILIAIRE N° 1. 7ᵉ puissance (Centaines).	LIGNE D'EAU AUXILIAIRE N° 2. Ordonnées (Centimètres).	LIGNE D'EAU AUXILIAIRE N° 2. Cubes (Dixièmes).	LIGNE D'EAU AUXILIAIRE N° 2. 5ᵉ puissance (Unités).	LIGNE D'EAU AUXILIAIRE N° 2. 7ᵉ puiss… (Centaines)
½ 10 AV							
9							
8							
7							
6							
5							
4							
3							
2							
1							
0							
1							
2							
3							
4							
5							
6							
7							
8							
9							
½ 10 AR							
Sommes							
Produits par..........		$\frac{2\lambda}{5}$	$\frac{2\lambda}{7}$	$\frac{2\lambda}{1}$	$\frac{2\lambda}{3}$	$\frac{2\lambda}{5}$	$\frac{2\lambda}{7}$
$A_p = \frac{2}{p}\int y^p dx$		$A'_5 =$	$A'_7 =$	$A''_1 =$	$A''_3 =$	$A''_5 =$	$A''_7 =$

Observations : La ligne d'eau auxiliaire n° 3 n'est autre que la • ligne d'eau du plan des formes.
Les chiffres de la première et de la dernière ligne sont les moitiés des quantités correspondantes.

(¹) Nom du bâtiment.

DES CARÈNES INCLINÉES TRANSVERSALEMENT
MM. Guyou et Simart).

limitée à la ° ligne d'eau du plan des formes. **Tableau I.**

Intervalle vertical des lignes d'eau du plan des formes $h =$
Intervalle vertical des lignes d'eau auxiliaires $h' =$

LIGNE D'EAU AUXILIAIRE N° 4.				LIGNE D'EAU AUXILIAIRE N° 5.		
ORDONNÉES (Centimètres).	CUBES (Dixièmes).	5ᵉ PUISSANCE (Unités).	7ᵉ PUISSANCE (Centaines).	ORDONNÉES (Centimètres).	5ᵉ PUISSANCE (Unités).	7ᵉ PUISSANCE (Centaines).
				»		
$\frac{2\lambda}{1}$	$\frac{2\lambda}{3}$	$\frac{2\lambda}{5}$	$\frac{2\lambda}{7}$	»	$\frac{2\lambda}{5}$	$\frac{2\lambda}{7}$
$A_1^{IV} =$	$A_3^{IV} =$	$A_5^{IV} =$	$A_7^{IV} =$	»	$A_5^{V} =$	$A_7^{V} =$

Calculs relatifs aux isocarènes de la carène droite limitée à la • ligne d'eau du plan des formes.

Tableau II.

NUMÉROTAGE des lignes d'eau auxiliaires.	VALEURS DE A_1 (séparer deux décimales).	VALEURS DE A_3 (séparer une décimale).	VALEURS DE A_5.	VALEURS DE A_7 (ajouter deux zéros).	FORMULES A EMPLOYER pour le calcul des différences $\Delta^n A_p'''$ jusqu'à celles du quatrième ordre, et des dérivées $\left(\frac{d^n A_p}{dz^n}\right)_0$.
(5)	»	»	$A_5^{V} =$	$A_7^{V} =$	$\Delta^1 A_p''' = \frac{(4)_p - (2)_p}{2}$
(4)	$A_1^{IV} =$	$A_3^{IV} =$	$A_5^{IV} =$	$A_7^{IV} =$	$\Delta^2 A_p''' = (4)_p - 2(3)_p + (2)_p$
(3) (1)	$A_1''' =$	$A_3''' =$	$A_5''' =$	$A_7''' =$	$\Delta^3 A_p''' = \frac{(5)_p - 2(4)_p + 2(2)_p - (1)_p}{2}$
(2)	$A_1'' =$	$A_3'' =$	$A_5'' =$	$A_7'' =$	$\Delta^4 A_p''' = (5)_p - 4(4)_p + 6(3)_p - 4(2)_p + (1)_p$
(1)	»	»	$A_5' =$	$A_7' =$	$\left(\frac{d^n A_p}{dz^n}\right)_0 = \frac{\Delta^n A_p'''}{h'^n}$

(1) La ligne d'eau auxiliaire n° 3 n'est autre que la • ligne d'eau du plan des formes.

Calcul de $\left(\frac{dA_1}{dz}\right)_0$.

$A_1''' =$

$\Delta^1 A_1''' =$

$\log \Delta^1 A_1''' =$

$\log h' =$

$\log \frac{\Delta^1 A_1'''}{h'} = \log \left(\frac{dA_1}{dz}\right)_0 =$

Calcul de $\left(\frac{dA_3}{dz}\right)_0$.

$A_3''' =$

$\Delta^1 A_3''' =$

$\log \Delta^1 A_3''' =$

$\log h' =$

$\log \frac{\Delta^1 A_3'''}{h'} = \log \left(\frac{dA_3}{dz}\right)_0 =$

Calcul de $\left(\frac{d^2 A_3}{dz^2}\right)_0$.

$\Delta^2 A_3''' =$

$\log \Delta^2 A_3''' =$

$2 \log h' =$

$\log \frac{\Delta^2 A_3'''}{h'^2} = \log \left(\frac{d^2 A_3}{dz^2}\right)_0 =$

Calcul de $\left(\frac{d^2 A_5}{dz^2}\right)_0$.

$\Delta^2 A_5''' =$

$\log \Delta^2 A_5''' =$

$2 \log h' =$

$\log \frac{\Delta^2 A_5'''}{h'^2} = \log \left(\frac{d^2 A_5}{dz^2}\right)_0 =$

Calcul de $\left(\frac{d^3 A_5}{dz^3}\right)_0$.

$\Delta^3 A_5''' =$

$\log \Delta^3 A_5''' =$

$3 \log h' =$

$\log \frac{\Delta^3 A_5'''}{h'^3} = \log \left(\frac{d^3 A_5}{dz^3}\right)_0 =$

Calcul de $\left(\frac{d^4 A_7}{dz^4}\right)_0$.

$\Delta^4 A_7''' =$

$\log \Delta^4 A_7''' =$

$4 \log h' =$

$\log \frac{\Delta^4 A_7'''}{h'^4} = \log \left(\frac{d^4 A_7}{dz^4}\right)_0 =$

Calculs relatifs aux isocarènes de la carène droite limitée à la • ligne d'eau du plan des formes.

Tableau III.

FORMULES A EMPLOYER pour le calcul des rayons de courbure successifs r_0 et r''_0 de la courbe enveloppe des flottaisons isocarènes, pour un axe d'inclinaison de direction constante et parallèle à l'axe longitudinal.	VALEURS des rayons de courbure r_0 et r''_0.
$A'''_1 r_0 = \left(\frac{dA_0}{dz}\right)_0$ $A'''_1 r''_0 = 3 r_0 A'''_1 + 3 r_0^2 \left(\frac{dA_1}{dz}\right)_0 - 6 r_0 \left(\frac{d^2A_2}{dz^2}\right)_0 + \left(\frac{d^3A_3}{dz^3}\right)_0$	$r_0 =$ (centimètres). $r'' =$ (décimètres).

FORMULES A EMPLOYER pour le calcul des rayons de courbure successifs r_0, r''_0, r^{IV}_0 de la courbe des centres de carène isocarènes, pour un axe d'inclinaison de direction constante et parallèle à l'axe longitudinal.	VALEURS des rayons de courbure r_0, r''_0, r^{IV}_0.
$V_0 r_0 = A'''_1$ $V_0 r''_0 = 3 V_0 r_0 - 3 r_0^2 A'''_1 + \left(\frac{d^3A_3}{dz^3}\right)_0$ $V_0 r^{IV}_0 = 26 V_0 r''_0 - 45 V_0 r_0 - 15 r_0 \left(\frac{d^3A_3}{dz^3}\right)_0 + 45 r_0^2 \left(\frac{d^2A_2}{dz^2}\right)_0 - 15 r_0^3 \left(\frac{dA_1}{dz}\right)_0 + \left(\frac{d^4A_4}{dz^4}\right)_0$	$r_0 =$ (centimètres). $r''_0 =$ (décimètres). $r^{IV}_0 =$ (mètres).

RÉSULTATS DÉFINITIFS.

Équation de la courbe FF′ enveloppe des flottaisons isocarènes.................. $\sigma = r_0\theta + r''_0 \frac{\theta^3}{1.2.3}$

Équation de la courbe C_0C' des centres de carène isocarènes..................... $s = r_0\theta + r''_0 \frac{\theta^3}{1.2.3} + r^{IV}_0 \frac{\theta^5}{1.2.3.4.5}$

Tracé des flottaisons isocarènes......... $d = FE = r_0 \frac{\theta^2}{1.2} + (r''_0 + 5r_0)\frac{\theta^4}{1.2.3.4}$

Bras de levier de la poussée isocarène par rapport au centre de carène C_0 de la carène droite de volume V_0........ $\varphi_{0,n} = C_0B = r_0\theta + (r''_0 - r_0)\frac{\theta^3}{1.2.3} + (r^{IV}_0 - r''_0 + r_0)\frac{\theta^5}{1.2.3.4.5}$

Équation de la développée métacentrique (D)........................... $s' = \frac{ds}{d\theta} - r_0 = r''_0 \frac{\theta^2}{1.2} + r^{IV}_0 \frac{\theta^4}{1.2.3.4}$

Équation de la développée (*d*)......... $\sigma' = \frac{d\sigma}{d\theta} - r_0 = r''_0 \frac{\theta^2}{1.2}$

• ligne d'eau du plan des formes

CHAPITRE XI.

MÉTHODES EXPÉRIMENTALES PROPRES A DÉTERMINER EXACTEMENT LES ÉLÉMENTS GÉOMÉTRIQUES DES CARÈNES INCLINÉES.

69. Balance simple ou composée de M. Heck.

Parmi les moyens les plus ingénieux imaginés pour la détermination expérimentale des bras de levier $\varphi_{0,n}$ des isocarènes inclinées transversalement, se trouvent les balances, simple ou composée, de M. Heck. La description en a été donnée dans les *Transactions of Naval Architects* de l'année 1885 (¹).

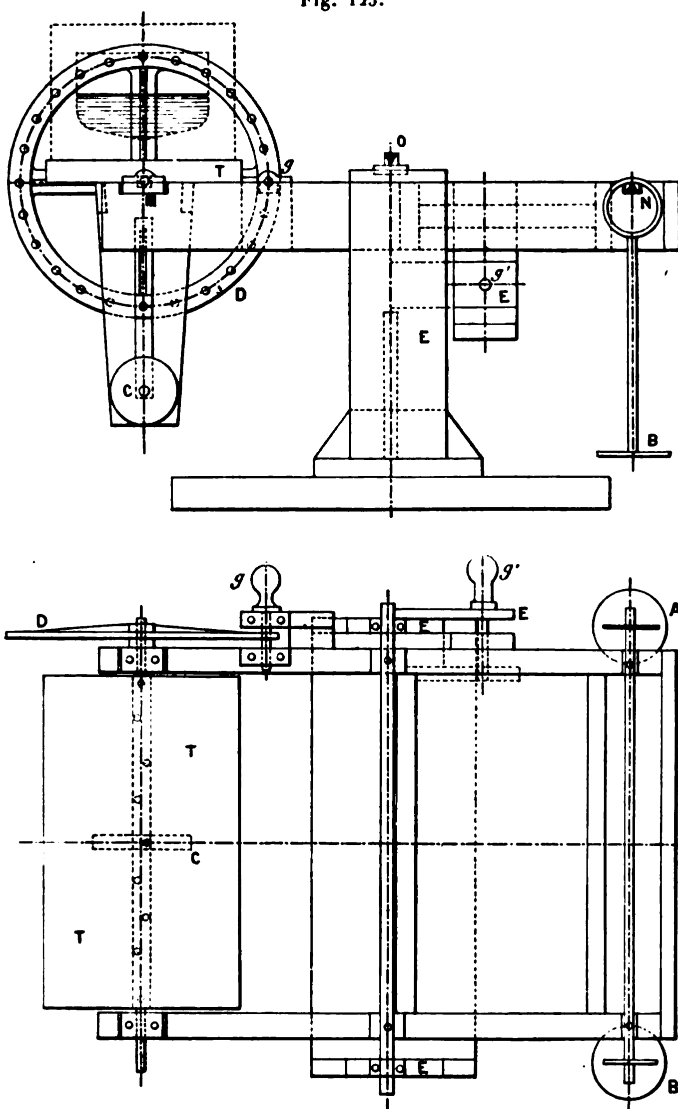
La balance simple est destinée à l'emploi d'un modèle en creux, ou modèle négatif, du navire; la balance composée, à l'emploi d'un modèle plein ou positif.

I. La balance simple, expérimentée avec le plus grand succès par M. Heck dans les chantiers de M. Denny, à Dumbarton, se compose (*fig.* 123) d'un châssis-fléau MN, oscillant autour d'un couteau de suspension O. Aux points M et N, situés à une égale distance l du couteau O, se trouvent : en N, un couteau de suspension pour deux plateaux A et B; en M, un axe de rotation pour une table TT, sur laquelle on vient fixer invariablement un bloc contenant le modèle négatif du navire à une petite échelle. Cette table est munie, par-dessous et en son milieu, d'un contrepoids C, qu'on peut faire monter ou descendre au moyen d'une vis de réglage, de façon que le centre de gravité du modèle vide, de la table et du contrepoids, autrement dit, de la partie mobile vide, se trouve sensiblement en M. Cette partie mobile autour de l'axe M peut être fixée au châssis-fléau sous différents angles variant de 15° en 15°, grâce à la goupille g qu'on enfonce, à l'angle

(¹) J.-H. Heck, *Méthode mécanique pour mesurer la stabilité des navires* (*Transactions*, vol. XXVI, p. 50).

voulu, mi-partie dans le châssis-fléau et mi-partie dans le cercle D fixé à la partie mobile. Enfin, le châssis-fléau peut lui-même être

Fig. 123.



immobilisé au moyen d'une goupille g' qu'on enfonce par moitié dans le châssis et dans le bâti E.

Pour faire des mesures avec cet instrument, on commence par

régler le contrepoids C, ce qui se fait en plaçant d'abord la partie mobile vide à 90° du fléau et en établissant l'équilibre au moyen de poids placés dans le plateau A. On fixe ensuite cette partie mobile vide à 0° ou 180° sur le fléau, et l'on agit sur le contrepoids C de façon que, sans rien changer aux poids du plateau A, l'équilibre reste réalisé.

Si, par cette opération, le centre de gravité de la partie mobile vide avait été amené exactement sur l'axe M, les poids placés en A équilibreraient exactement cette partie sous quelque angle qu'elle fût fixée au fléau. Comme il peut y avoir eu une légère erreur, on fixe alors la partie mobile vide, successivement sous les angles de 15°, 30°, 45°, 60°, 75° par rapport au fléau et des deux côtés de la verticale, et l'on note, pour chacune de ces positions, le poids qu'il faut placer en A pour produire l'équilibre parfait.

Cela fait, pour étudier les éléments géométriques des isocarènes d'un certain volume V_0, on place la partie mobile droite, c'est-à-dire perpendiculaire au fléau; on met en A la tare correspondante, puis on immobilise le fléau, et l'on verse dans le modèle négatif un volume liquide v_0, correspondant à V_0 d'après l'échelle du modèle. Si ϖ est le poids spécifique du liquide employé, il faudra, pour que le fléau reste horizontal quand on lui rendra la mobilité, que des poids marqués, d'une valeur $p = \varpi v_0$, soient placés dans le second plateau B. On connaît d'ailleurs exactement, par les Tableaux de calculs des carènes droites, la position du centre de gravité C_0 du volume liquide versé dans le modèle et, par suite, sa hauteur d au-dessus de l'axe M.

Inclinons maintenant (*fig.* 124) la partie mobile, pleine d'eau, d'un angle Θ_n sur le fléau, après avoir immobilisé ce dernier. La tare placée sur le plateau A est celle qui convient pour la partie mobile vide inclinée de l'angle Θ_n. Quant aux poids marqués p' à mettre en B pour produire, dans les conditions d'inclinaison choisies, l'horizontalité du fléau supposé libre, ils seront plus petits ou plus grands que p, suivant que l'inclinaison Θ_n se fera du côté de l'axe d'oscillation de la balance ou vers l'extérieur; car le moment, par rapport à l'axe O, du poids constant de l'eau versée dans le modèle, diminue pour l'inclinaison Θ_n dans un sens, et augmente pour la même inclinaison en sens contraire.

Pour une inclinaison vers l'intérieur, on aura la distance $\overline{C_0C}$

ou $\varphi_{0,n}$ par

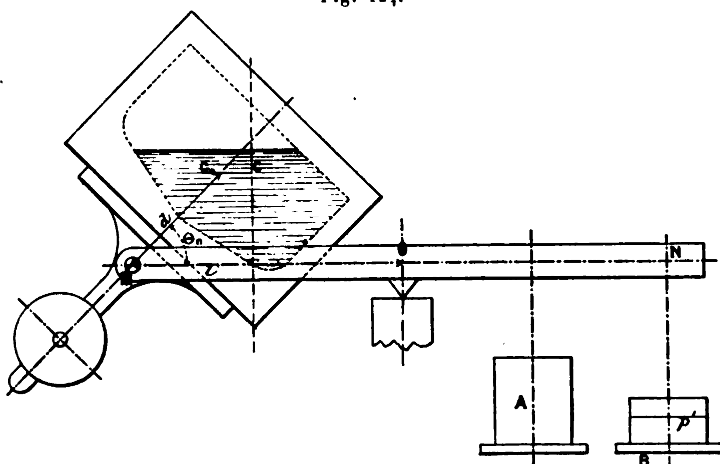
$$p'l = p(l - d\cos\theta_n - \varphi_{0,n}) \quad \text{ou} \quad \varphi_{0,n} = \frac{p - p'}{p}\,l - d\cos\theta_n\,;$$

Pour une inclinaison vers l'extérieur, par

$$p'l = p(l + d\cos\theta_n + \varphi_{0,n}) \quad \text{ou} \quad \varphi_{0,n} = \frac{p + p'}{p}\,l + d\cos\theta_n.$$

A chaque inclinaison θ_n, on fait toujours les opérations d'un bord et de l'autre, pour prendre la moyenne des deux valeurs symétriques de $\varphi_{0,n}$, si ces valeurs calculées sont peu différentes

Fig. 124.



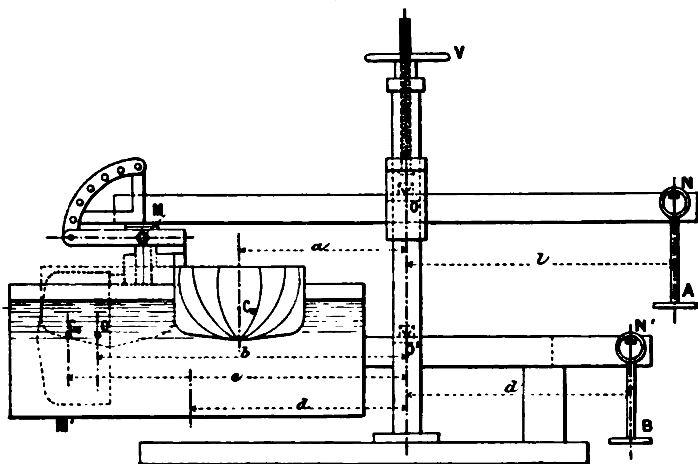
l'une de l'autre. Si ces valeurs présentaient une différence notable, ce serait l'indice qu'une erreur aurait été commise au cours des expériences ou dans les calculs.

Pour le bloc contenant le modèle négatif, on emploiera, par exemple, la paraffine, qu'on peut couler, en deux parties, autour d'un modèle positif. Le modèle positif sera ensuite enlevé, à la manière des noyaux des pièces de fonderie. Mais, qu'on emploie une matière ou une autre, on devra rechercher pour ce bloc les plus petites dimensions possibles, sans cependant diminuer outre mesure la précision de la détermination des $\varphi_{0,n}$. A cet effet, on peut contracter le navire dans le sens de la longueur en constituant le modèle positif au moyen de lames de bois d'épaisseur constante, découpées suivant les formes des différents couples, puis juxtaposées.

Le modèle négatif employé par M. Heck était formé par des lames de bois d'épaisseur constante, percées d'ouvertures faites suivant les formes des différents couples, juxtaposées et serrées entre deux plaques de tête au moyen de huit longs boulons. Pour se rendre compte de la hauteur d'eau à l'intérieur, une des plaques de tête portait au centre, et dans le prolongement de sa face interne, un regard vitré. Les dimensions extérieures du bloc de bois ainsi constitué étaient : longueur, 22^{cm}; largeur, 40^{cm}; hauteur, 23^{cm}. Pour le rendre étanche et pour empêcher son imbibition, on mastiquait et revêtait de céruse l'intérieur de sa cavité.

II. La balance composée de M. Heck, décrite dans le même Mémoire que la balance simple, est une combinaison de deux balances. L'une porte le modèle plein ou positif du navire, réduit en longueur, et plus ou moins incliné par rapport au fléau. L'autre

Fig. 125.



porte un réservoir plein de liquide, où l'on peut immerger le modèle à la profondeur et sous l'angle voulus (*fig.* 125). Chacun des deux fléaux MN, M'N' peut être, à volonté, immobilisé par une goupille ou rendu libre.

Après avoir mis de l'eau dans le réservoir M' et fixé le modèle plein au fléau MN et en position droite, nous commencerons par équilibrer isolément chacun des deux fléaux en plaçant des tares convenables dans les plateaux A et B. Nous immobiliserons alors les fléaux, puis nous enlèverons à la tare du plateau A un certain

poids p' calculé par la relation

$$p'l = \varpi v_0 a = pa;$$

l distance au couteau d'oscillation du couteau de suspension du plateau A; a distance au couteau d'oscillation du plan longitudinal du modèle en position droite.

Nous ajouterons, au contraire, à la tare du plateau B un poids $p = \varpi v_0$.

Dans ces conditions, si, au moyen de la vis à volant V, nous faisons descendre doucement tout l'ensemble de la balance MN, jusqu'à immerger dans le liquide du réservoir un volume v_0 de la carène du modèle, quand nous rendrons la liberté aux deux fléaux, l'équilibre subsistera pour chacun d'eux. En effet, la pression de l'eau sur le modèle se traduit par une poussée verticale ϖv_0, s'exerçant de bas en haut sur le fléau MN et à une distance a de son couteau d'oscillation. Par contre, la pression ou réaction de la carène du modèle sur l'eau du réservoir se traduit par une force ϖv_0 égale et de sens contraire s'exerçant au centre du réservoir, lequel est à la même distance d que le plateau B du couteau d'oscillation du fléau inférieur M'N'.

Donnons maintenant au modèle une inclinaison Θ_n sur le fléau supérieur. Pour le modèle incliné et le fléau supérieur horizontal, on connaît la distance e, au couteau d'oscillation de ce fléau, du point donné C_0, centre de la carène droite de volume v_0; mais la poussée s'effectue en un point C différent de C_0, quand le volume de carène immergé a atteint la valeur v_0, et, pour établir alors l'horizontalité du fléau MN, il faut enlever à la tare primitive du plateau A un poids p'', tel que l'on ait

$$p''l = pb,$$

en appelant b la distance de la poussée C au couteau d'oscillation O.

On a donc

$$p''l = p(e - \varphi_{0,n});$$

d'où

$$\varphi_{0,n} = e - \frac{p''l}{p}.$$

Il n'y a pas lieu, évidemment, de retoucher aux poids du plateau B, puisque le volume immergé doit rester constant, quelle

que soit l'inclinaison Θ_n. On ne devra toucher à ces poids que quand il s'agira de passer à une autre isocarène V'_0.

Comme on le voit sur la *fig.* 125, le mode d'attache du modèle au fléau MN est tel qu'après avoir effectué les mesures des bras de levier pour les diverses inclinaisons sur un bord, on peut retourner le modèle bout pour bout et produire des inclinaisons symétriques.

70. Méthode de M. Blom.

En 1873, M. Blom avait indiqué, dans le *Journal of the Royal United Service Institution,* une méthode originale, plus simple encore que celle de M. Heck, mais moins précise, et consistant à découper les couples du navire dans une feuille de carton d'épaisseur e bien uniforme. En les collant ou juxtaposant, on réalise, comme pour le bloc en bois de M. Heck, une carène fictive dérivant de la proposée par le changement de l'écartement vrai λ des couples en e, et du poids spécifique du liquide en un autre, celui du carton homogène employé.

En coupant donc cette carène fictive par le plan oblique de la flottaison que l'on veut considérer, et en la pesant, on aura une quantité proportionnelle ou à son déplacement ou à son volume. En la suspendant ensuite par des fils, on pourra déterminer la position de son centre de gravité et, par suite, le bras de levier cherché $\varphi_{0,n}$.

Pour appliquer cette méthode, il faut construire autant de carènes fictives que l'on veut considérer d'angles différents. L'une d'elles, affectée, par exemple, à l'angle d'inclinaison Θ_n, servira, par recoupes successives, pour une série de flottaisons obliques parallèles et équidistantes, entre les résultats desquelles on pourra interpoler pour trouver celui qui convient à une isocarène donnée V_0.

71. Méthode par l'expérience de stabilité exécutée sur un modèle.

Nous renvoyons, pour l'exposé de cette méthode plutôt mécanique que géométrique, à la troisième Partie (Statique) du présent Ouvrage. A ce moment, en effet, nous aurons à parler de l'expérience de stabilité par déplacement de poids à bord, qu'il est réglementaire de faire subir au navire lui-même dans certaines

circonstances, et qui est en tout semblable à celle par laquelle on peut, pour le modèle, déterminer une valeur quelconque du bras de levier isocarène $\varphi_{0,n}$.

Disons seulement que la méthode dont il est ici question s'applique aussi bien aux inclinaisons longitudinales qu'aux inclinaisons transversales, ce qui n'a pas lieu pour la méthode des balances de M. Heck.

RÉSUMÉ ET CONCLUSION DES CHAPITRES VI, VII, VIII, IX, X ET XI.

72. Comparaison des méthodes de calcul pour carènes inclinées transversalement.

Les méthodes de calcul, pour carènes inclinées transversalement, que nous avons passées en revue dans les Chapitres VI, VII, VIII, IX, X et XI doivent être comparées maintenant au double point de vue de l'exactitude et de la rapidité.

En ce qui concerne l'exactitude, les méthodes planimétriques sont seules parfaites. Elles mettent à l'abri tout à la fois des erreurs d'intégration et des erreurs spéciales aux extrémités ou aboutissements des sections. Toute autre méthode, effectuant des sommations dans deux directions au moyen d'ordonnées mesurées sur la carène, fait, en effet, une première erreur d'aire, sur les couples par exemple, en les considérant comme une somme de rectangles, puis une seconde erreur de volume, en considérant la carène comme une somme de cylindres; enfin, une troisième erreur y est due à la courbure des extrémités, si l'on n'a pas eu le soin de faire les corrections dites des aboutissements sur les ordonnées des fonds des couples et des extrémités des lignes d'eau supérieures.

La méthode planimétrique mixte (Mac Farlane Gray), avec un seul système d'erreurs, vient ensuite.

Les méthodes qui emploient uniquement les ordonnées corrigées du plan des formes (Rossin, Clauzel, Vertical intégral) se placeraient en troisième ligne, avec les deux systèmes d'erreurs dus aux sommations, si elles n'étaient pas complètement délaissées par ailleurs pour des difficultés graphiques ou autres.

Les méthodes basées sur le calcul d'un onglet (Daymard, Reech), additif à une carène droite déjà corrigée, c'est-à-dire n'impliquant plus que les deux systèmes d'erreurs des intégrations, introduisent dans le calcul de cet onglet un troisième système d'erreurs aux extrémités, si l'on néglige, comme c'est l'usage, de corriger chaque vecteur dont la direction s'éloigne trop de la normale au couple correspondant. Il en est de même de la méthode qui emploie des réseaux de sections spéciaux (Benjamin-Spence); car, outre les deux systèmes d'erreurs d'intégration, elle comporte les erreurs d'aboutissement des fonds des couples, dont on ne tient pas compte en général. Ces trois méthodes seront donc, au point de vue de l'exactitude, classées ensemble au quatrième rang.

La méthode Barnes, basée sur le calcul d'un onglet, comme les méthodes Daymard et Reech, comporte un système d'erreurs de plus que celles-ci, celui de l'assimilation à un cylindre de la tranche comprise entre les flottaisons parallèles isobathe et isocarène. Elle occupe donc le cinquième rang.

Reste la méthode analytique de MM. Guyou et Simart, qui doit être mise à part; car, seule de toutes les méthodes examinées, elle ne peut s'appliquer à tous les angles possibles d'inclinaison, même si les murailles sont de forme bien régulière. Cet inconvénient grave est-il racheté par une plus grande exactitude? Nous remarquerons d'abord que le second système d'erreurs d'intégration (sommation dans le sens de la longueur) subsiste en entier. En ce qui concerne le premier système d'erreurs, celui qu'on fait sur les aires des couples, que les auteurs calculent analytiquement comme l'aire d'une courbe analytique ayant cinq points communs avec le couple réel, il peut être moindre ou plus important que celui des méthodes ordinaires, suivant la régularité de la courbure des murailles. Si les couples présentent un changement brusque de courbure en dehors de la région où l'on a mené les lignes d'eau droites pour déterminer les paramètres de l'équation de chaque couple, la méthode sera, en général, inférieure, comme exactitude, dès que les flottaisons isocarènes atteindront la région contournée, et, dans ce cas, pour étendre sa limite d'emploi, il faudra ou espacer davantage, aux dépens de la précision, les lignes d'eau droites auxiliaires jusqu'à les faire passer dans la région contournée, ou employer un plus grand

nombre de lignes d'eau auxiliaires, c'est-à-dire calculer pour les bras de levier un plus grand nombre de termes que n'en comportent les Tableaux de calculs spéciaux à cette méthode. Dans tous les cas, un troisième système d'erreurs, analogue à celui des aboutissements, se produit aux couples extrêmes, en raison même de leur configuration généralement tourmentée et par suite de ce que nous venons de dire. La méthode Guyou et Simart, sauf pour des cas de régularité aujourd'hui assez particuliers, ne peut donc, pour les grands angles d'inclinaison, se réclamer d'une exactitude plus grande que les trois méthodes ordinaires de calcul que nous avons classées au quatrième rang, et de plus elle a l'inconvénient d'avoir un angle limite pour son application, celui où la flottaison isocarène atteint le can du pont supérieur.

Passons à la comparaison des méthodes au point de vue de la rapidité des opérations. Ici nous avons à distinguer le cas où l'on ne cherche les bras de levier isocarènes que pour un ou deux déplacements seulement, comme dans le calcul d'un avant-projet par exemple, et celui où l'on cherche ces résultats pour un certain nombre de déplacements dans le but de tracer, pour un navire existant, un graphique fournissant le bras de levier de la poussée, qui correspond à un déplacement et à une inclinaison transversale quelconques.

Dans le premier cas, la méthode anglaise de Barnes ([1]) et la méthode française de Guyou et Simart (quand elle est applicable) offrent un avantage capital et se placent sans conteste au premier rang. En effet, avec une autre méthode quelconque, il faudra pour les isocarènes, fût-ce d'un seul déplacement, interpoler parmi les résultats calculés d'un certain nombre de stations au moins égal à trois, c'est-à-dire qu'il faudra remplir au moins trois Tableaux complets; avec les deux méthodes précitées au contraire, toute interpolation est supprimée et le nombre des Tableaux complets à remplir est seulement égal au nombre des déplacements différents qu'on envisage.

Dans le second cas, celui où l'on a dans toutes les méthodes un égal nombre de Tableaux complets à remplir, il n'y a d'avantage

([1]) Sous le nom de *méthode Reech simplifiée*, M. Guyou, dans sa *Théorie du Navire*, p. 159, a appliqué le principe de la méthode Barnes au calcul des coordonnées Z et Y de Reech pour les centres de carène isocarènes.

marqué, au point de vue de la rapidité, qu'en faveur de la méthode planimétrique mixte de Mac Farlane Gray (qui exige, il est vrai, pour développer toutes ses qualités de rapidité, l'installation d'un outillage spécial), et de la méthode Benjamin-Spence. Cette dernière méthode doit son avantage à l'extrême simplicité de ses formules de calcul débarrassées de l'emploi des lignes trigonométriques, qui viennent compliquer celles des méthodes basées sur le calcul des onglets.

Nous résumerons la comparaison que nous venons de faire de la façon suivante :

1° Au point de vue de l'exactitude, les méthodes planimétriques complètes constituent les méthodes-types;

2° Au point de vue de la rapidité, la méthode qu'il convient d'employer de préférence, pour la recherche des isocarènes d'un ou de deux déplacements seulement (pour les avant-projets par exemple), est celle de Barnes;

3° Au point de vue de la rapidité, la méthode à adopter de préférence, pour la confection d'un diagramme donnant les bras de levier pantocarènes pantoclines, est celle de Benjamin-Spence.

Dans nos comparaisons, nous n'avons point fait entrer les méthodes expérimentales, parce qu'elles forment un genre à part donnant à la fois, quand les expériences sont faites avec soin, sur un modèle à assez grande échelle, toute l'exactitude et toute la rapidité désirables. Il est même un cas où la méthode expérimentale au moyen d'un modèle s'impose en quelque sorte : c'est celui où l'on cherche les bras de levier isocarènes pour un ou plusieurs déplacements et aussi pour plusieurs assiettes différentes du navire.

D'une façon générale, on ne saurait assez recommander l'emploi des méthodes expérimentales, qui forment un contrôle immédiat des résultats trouvés par le calcul pour les conditions normales de navigabilité d'un bâtiment, et qui de plus permettent de trouver rapidement le bras de levier de la poussée pour telle condition anormale qu'on peut être amené à prévoir.



CHAPITRE XII.

APPLICATION AU NAVIRE DES MÉTHODES DE CALCUL POUR LES CARÈNES INCLINÉES.

MÉTHODES APPROXIMATIVES RAPIDES.

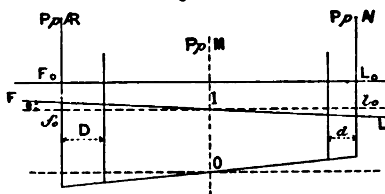
73. Méthode du tirant d'eau moyen pour les faibles inclinaisons longitudinales.

Quand l'angle de la flottaison inclinée longitudinalement avec la flottaison en charge est assez petit et qu'on cherche seulement le déplacement de la carène limitée par cette flottaison, on ne se donne pas la peine de construire dans ce but des échelles Bonjean ou un vertical intégral; on opère plus simplement.

Soit la flottaison inclinée FL (*fig.* 126).

Nous savons que la flottaison $f_0 l_0$, parallèle à la flottaison en charge, qui détache le même volume que FL, passe par le centre

Fig. 126.



de gravité de FL, car le théorème de Guldin donne, en appelant u et u' les aires détachées dans FL par le plan transversal qui passe par ce centre de gravité, x et x' les distances à ce plan des centres de gravité des aires partielles u et u',

$$ux\theta = u'x'\theta,$$

c'est-à-dire

$$ux = u'x' \quad \text{ou} \quad ux - u'x' = 0.$$

La droite d'intersection I de $f_0 l_0$ et de FL passe donc par le centre de gravité de FL, si θ est très petit, et nous pourrons nous borner à chercher ce centre de gravité pour y faire passer une flottaison droite limitant un volume que nous saurons trouver de suite dans le Tableau des carènes droites.

D'habitude, on opère plus simplement encore, et le résultat est suffisamment exact pour la pratique. On suppose que le centre de gravité de FL se trouve précisément sur la perpendiculaire milieu en I, et l'on est alors conduit à chercher simplement le déplacement d'une carène droite ayant *même tirant d'eau moyen* que la carène réelle.

Il est utile à ce propos d'indiquer la façon dont on mesure en pratique les faibles inclinaisons longitudinales θ. Nous savons déjà que l'assiette du navire s'exprime par le quotient $\frac{\Delta}{\Lambda}$ de la différence Δ des tirants d'eau extrêmes par la longueur entre perpendiculaires Λ; ou, autrement dit, que l'assiette du navire est représentée par la tangente trigonométrique de l'angle α que fait la quille avec la flottaison. L'assiette normale étant $\operatorname{tang}\alpha_0 = \frac{\Delta_0}{\Lambda}$, on est dans l'usage d'exprimer les changements d'assiette en indiquant de combien de centimètres a augmenté ou diminué la différence Δ_0. Or $\frac{d\Delta_0}{\Lambda} = d(\operatorname{tang}\alpha_0) = \operatorname{tang}(\alpha_0 \pm \theta) - \operatorname{tang}\alpha_0$. On peut donc déduire l'inclinaison θ en angle de ce mode de mesure, puisqu'on a

$$\frac{\operatorname{tang}\alpha_0 + \operatorname{tang}\theta}{1 - \operatorname{tang}\alpha_0 \operatorname{tang}\theta} - \operatorname{tang}\alpha_0 = \frac{d\Delta_0}{\Lambda};$$

d'où l'on déduit

$$\operatorname{tang}\theta = \frac{\Lambda\, d\Delta_0}{\Lambda^2 + \Delta_0^2 + \Delta_0\, d\Delta_0}$$

et, en négligeant au dénominateur le terme en $d\Delta_0$ devant les deux autres,

$$\operatorname{tang}\theta = d\Delta_0 \frac{\Lambda}{\Lambda^2 + \Delta_0^2}.$$

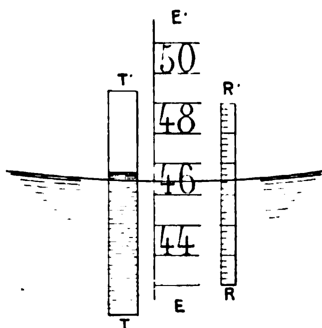
Pour relever les tirants d'eau à flot, et par suite Δ et $d\Delta$, on établit aux extrémités et au milieu du navire des *échelles de tirants d'eau* dont les chiffres sont, tantôt peints, tantôt constitués par des plaques de métal clouées sur la carène. Ces chiffres ont une hauteur de 10^{cm} et leur bord inférieur est distant du dessous de

la fausse quille, suivant une parallèle aux perpendiculaires du plan de formes, d'un nombre de décimètres égal au nombre qu'ils expriment. L'intervalle entre deux chiffres consécutifs est aussi de 10^{cm}.

Si l'assiette normale prévue au plan des formes n'est pas réalisée lors de la lecture, les distances de 10^{cm} en 10^{cm}, mesurées sur l'échelle, ne sont plus comptées sur des perpendiculaires au niveau de l'eau, mais bien sur les perpendiculaires du plan des formes qui sont alors obliques sur la verticale. Pour les faibles dénivellations, on peut cependant compter les chiffres lus comme indiquant des profondeurs, l'erreur due à l'inclinaison étant insignifiante.

A première vue, et de loin, on lit aisément le tirant d'eau à 5^{cm} près. Quand on désire une plus grande approximation, on s'approche en embarcation de l'échelle EE′ (*fig.* 127) et l'on applique momentanément une règle graduée en centimètres RR′ sur la graduation de l'échelle, qu'elle complète dans la région de la flottaison. On peut alors apprécier le centimètre, *si le niveau de l'eau est absolument calme.* Cette approximation est la limite extrême de ce qu'on peut obtenir dans le port; en rade, elle ne sera jamais atteinte. On facilite quelquefois la lecture en atténuant les mouvements de l'eau par l'emploi d'un tube vertical TT′, d'un diamètre assez fort (3^{cm} à 4^{cm}) pour qu'il ne s'y forme point de ménisque capillaire, et de 40^{cm} à 50^{cm} de longueur au moins, pour que la colonne d'eau qu'il renferme soit peu influencée par les agitations de surface.

Fig. 127.



Les échelles de tirants d'eau extrêmes placées à bord ne correspondent pas, en général, exactement à la position des perpendiculaires extrêmes du plan des formes. A l'arrière, l'échelle est le plus souvent sur la face latérale de l'étambot *Ꝛ* et cet endroit, dans les navires à une seule hélice, peut être à 2^{m} ou 3^{m} sur l'avant de la perpendiculaire Æ. De même, à l'avant on dispose l'échelle suivant le contour plus ou moins courbe de l'étrave, en ayant cependant soin de compter toujours la hauteur accusée par les chiffres suivant une parallèle à la perpendiculaire *Ꝛ*. Mais les

lectures des tirants d'eau T' et t', faites sur les échelles, n'en sont pas moins différentes des tirants d'eau extrêmes T et t qu'on mesurerait sur les perpendiculaires elles-mêmes, et il faut, si l'on veut une mesure précise du déplacement, commencer par déduire T et t de T' et t', ou le tirant d'eau moyen t_m du tirant d'eau moyen relevé t'_m.

Soient donc D et d les distances des échelles arrière et avant aux perpendiculaires correspondantes, Λ' la distance entre échelles, on a (*fig.* 126)

$$\Lambda' = \Lambda - D - d, \qquad \Delta' = T' - t', \qquad \tang\alpha = \frac{\Delta'}{\Lambda'} = \frac{\Delta}{\Lambda}$$

et

$$T = T' + D \tang\alpha = T' + D\frac{\Delta'}{\Lambda'},$$

$$t = t' - d \tang\alpha = t' - d\frac{\Delta'}{\Lambda'};$$

d'où

$$t_m = \frac{T+t}{2} = \frac{T'+t'}{2} + \frac{D-d}{2}\,\frac{\Delta'}{\Lambda'} = t'_m + \frac{D-d}{2}\,\frac{\Delta'}{\Lambda'}.$$

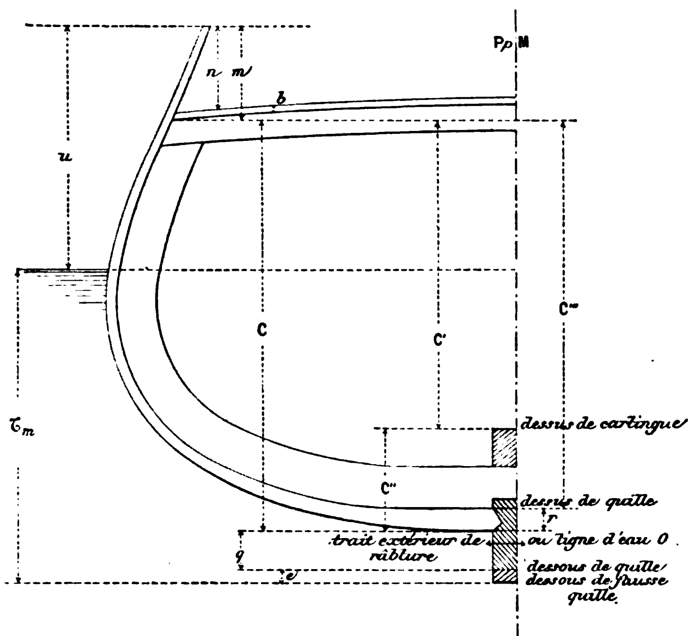
Ainsi les tirants d'eau moyens ne seront pas affectés par la position des échelles, si celles-ci sont placées une fois pour toutes à égales distances des perpendiculaires extrêmes; c'est là une précaution qu'il ne faut pas négliger de prendre avant la mise à l'eau.

Le tirant d'eau au milieu $\mathfrak{T}_m$ (qui diffère généralement du tirant d'eau moyen t_m, parce que la quille reste rarement parfaitement droite) est obtenu à l'aide d'échelles placées le long de la carène et de chaque côté, à l'emplacement de la perpendiculaire milieu. On peut aussi l'obtenir en mesurant directement l'élévation au-dessus du niveau de l'eau d'un repère pris sur les œuvres mortes et dont la hauteur au-dessus du dessous de la fausse quille peut se déduire exactement des données de la construction. A cet effet, on choisit en général comme repère l'arête extérieure du seuillet d'un sabord situé au milieu et au-dessus du pont supérieur. La hauteur de ce seuillet constitue ce qu'on appelle la *hauteur de batterie au milieu*, u, variable avec l'assiette et l'immersion. On la relève à flot. Or on a (*fig.* 128)

$$u + \mathfrak{T}_m = m + C + q + e,$$

en appelant m la hauteur du seuillet de sabord (arête intérieure) au-dessus de la ligne droite des baux du pont supérieur; C le

Fig. 128.



creux sur fond de carène à la ligne droite des baux du pont supérieur et au milieu; q le tableau de la quille au milieu; e l'épaisseur de la fausse quille au milieu. Cette relation donne $\mathfrak{T}_m$, tirant d'eau milieu cherché.

Si l'on ne connaît pas m, on mesure les quantités n et b, dont la somme est très approximativement égale à m; n est la hauteur du seuillet au-dessus du bordé du pont, b est l'épaisseur du bordé du pont, inscrite au devis. On peut aussi, si l'on ne connaît pas C, mesurer le creux C′ au milieu sur carlingue, qui, en lui ajoutant C″ distance, inscrite au devis, du dessus de carlingue au fond de carène au milieu, reproduit C.

Enfin, pour les anciens devis où l'on donne le creux *sur quille* C‴, il faut écrire

$$u + \mathfrak{T}_m = m + C''' + r + q + e,$$

en ajoutant à C‴ la hauteur r de rablure au milieu pour repro-

duire C. Dans les navires en fer à double clin (*fig.* 129), la ligne de fond de carène passe au milieu de la virure de recouvrement,

Fig. 129.

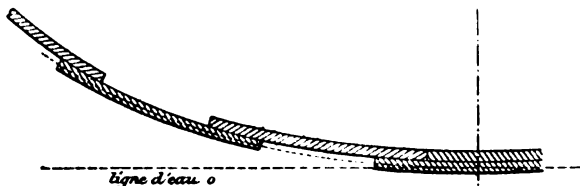
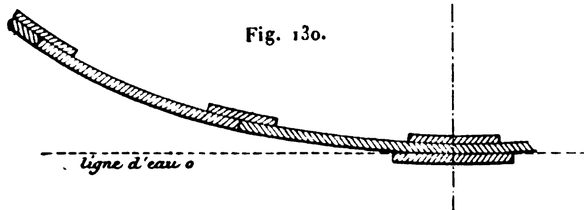


Fig. 130.



et, dans les navires en fer à franc bord (*fig.* 130), cette ligne est déterminée par l'intersection du contour extérieur du bordé avec le plan longitudinal.

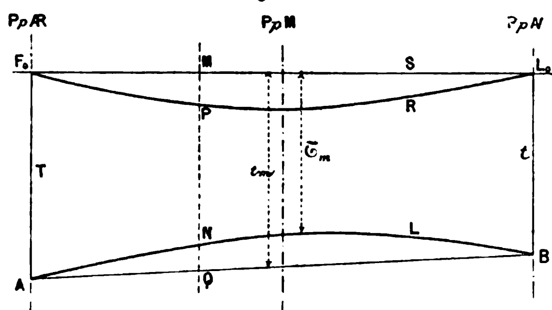
74. De l'arc et du contre-arc. Méthode rapide de calcul du déplacement d'un navire arqué.

A flot, les navires, surtout en bois, se déforment plus ou moins suivant la solidité de la charpente et la répartition des poids. Grâce aux systèmes de consolidation employés, la déformation est beaucoup moins considérable aujourd'hui que dans les anciennes constructions; sur les navires en fer, elle est presque nulle. Toutefois, comme les calculs de déplacement sont faits dans l'hypothèse d'une quille rectiligne et que, quand il y a déformation, la quille devient convexe vers le haut (on dit alors qu'elle prend de l'arc), ou vers le bas (contre-arc), il est nécessaire de voir comment on pourra calculer le nouveau déplacement.

Soit le navire arqué (*fig.* 131) et ayant les tirants d'eau extrêmes, T et *t*, du plan des formes. La première chose à faire est de déterminer la forme de la quille ANLB et la flèche de sa courbure. Pour cela, on promène sous cette quille un châssis ou cadre rigide CCC′C′ (*fig.* 132), en ayant soin que les branches parallèles

graduées CC et C′C′ soient bien verticales. Il faut pour cela qu'elles indiquent le même nombre de centimètres de chaque côté à leurs points d'affleurement, a, a, avec la surface de l'eau, et,

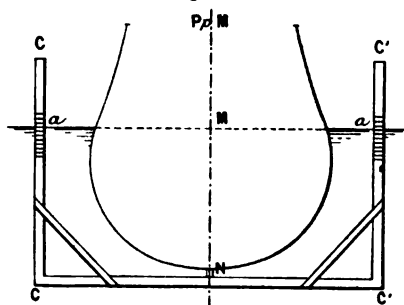
Fig. 131.



d'autre part, qu'elles ne soient inclinées ni sur l'avant ni sur l'arrière, ce dont on s'assure avec un fil à plomb.

A chaque station du châssis on relève donc la hauteur MN

Fig. 132.



(*fig.* 131 et 132). Le plus souvent, on se contente de relever la flèche de l'arc, qu'on suppose se trouver au milieu, et, pour cela, il n'est pas besoin du châssis, car cette flèche est donnée par la différence du tirant d'eau moyen t_m et du tirant d'eau réel au milieu $\mathfrak{T}_m$, relevé sur l'échelle des tirants d'eau milieu, ou par la hauteur de batterie,

$$f = t_m - \mathfrak{T}_m.$$

Connaissant cette flèche, on suppose alors que la figure de la quille est un arc de parabole et que chaque tranche verticale, considérée comme indépendante, s'est relevée d'une hauteur verticale

telle que QN (*fig.* 131). C'est donc comme si, la quille restant droite, la carène se trouvait limitée par une flottaison non plus plane, mais en cylindre parabolique F_0PRL_0, obtenu en portant, en chaque point de la longueur, MP = NQ. Il faut alors retrancher du volume de la carène droite, mesurée avec les tirants d'eau T et t sur le plan des formes, le volume ou segment $F_0PRL_0SMF_0$. On pourrait, pour déterminer ce volume, se servir des échelles Bonjean, mais ce procédé serait trop long et trop laborieux. On préfère recourir à une méthode approchée. On remarque que, si la flottaison plane F_0L_0 était un rectangle de surface A, le volume en question aurait pour expression

$$V = \tfrac{2}{3}Af = A.\tfrac{2}{3}f,$$

c'est-à-dire qu'il suffirait de retrancher du déplacement, mesuré avec quille rectiligne, celui d'une tranche horizontale située à la flottaison et ayant pour hauteur $\frac{2}{3}f$. En d'autres termes, il suffirait de faire les calculs en diminuant tous les tirants d'eau, et par suite le tirant d'eau moyen t_m, de $\frac{2}{3}f$. Pour une flottaison non rectangulaire, on applique la même règle et l'on effectue sur le tirant d'eau moyen une correction dite *correction des deux tiers de l'arc*.



DEUXIÈME PARTIE.

GÉOMÉTRIE DU NAVIRE.

CHAPITRE XIII.

PRÉLIMINAIRES DE MÉCANIQUE.
DÉCOMPOSITION DU DÉPLACEMENT LE PLUS GÉNÉRAL D'UN FLOTTEUR.

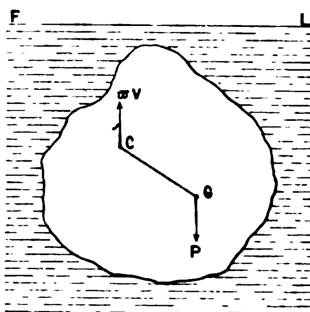
75. Préliminaires de Mécanique. — Équilibre des corps plongés et flottants.

Quand un corps est plongé dans un fluide en repos, complètement ou jusqu'à un plan de flottaison horizontal, les pressions qu'exerce ce fluide sur tous les points des parois du corps avec lesquelles il est en contact ont une résultante unique, verticale, dirigée de bas en haut, égale au poids du fluide déplacé et appliquée au centre de gravité du volume fluide dont le corps tient la place, centre de gravité qui se confond d'ailleurs avec le centre de figure de ce volume, si le fluide est homogène. C'est le principe d'Archimède. La résultante unique dont nous venons de parler est appelée la *poussée* statique du fluide sur le corps.

Prenons donc d'abord un corps complètement plongé (cas des bateaux sous-marins, torpilles, aérostats, etc.). Un tel corps est soumis à deux forces : son poids P, appliqué au centre de gravité G du corps (*fig.* 133), et la poussée ϖV qu'il reçoit du fluide ambiant, laquelle est appliquée en C, centre du volume du corps. Quelle que soit l'orientation du corps dans le liquide, les deux

points G et C restent invariables dans le solide. Or les principes élémentaires de la Mécanique nous enseignent que le corps ne sera en équilibre que si les deux forces P et ϖV verticales sont égales, d'une part, et, de l'autre, directement opposées, c'est-à-dire

Fig. 133.



encore si les deux forces sont égales, et si la ligne CG, tracée dans le solide, est verticale.

Si nous supposons la ligne CG verticale, mais les forces P et ϖV inégales, l'équilibre n'aura pas lieu, le corps pouvant être considéré comme soumis à une force verticale unique $\pm(P - \varpi V)$, constante tant que le corps restera complètement plongé. Le corps tombera vers le fond ou montera vers la surface, suivant que l'on aura $P > \varpi V$ ou $P < \varpi V$, et cela d'un mouvement uniformément accéléré, si le milieu fluide est non résistant, ou accéléré suivant une certaine loi, si le milieu est résistant.

Dans le premier cas, l'accélération constante j sera donnée par

$$\pm(P - \varpi V) = \pm \frac{P}{g} j$$

ou

$$j = g \frac{P - \varpi V}{P}.$$

Dans le second cas, la résistance sera une certaine fonction $f(u)$ de la vitesse $u = \frac{ds}{dt}$, et l'on pourra écrire

$$j = \frac{du}{dt} = g \frac{P - \varpi V - f(u)}{P} = \varphi(u);$$

d'où

(1) $$\frac{du}{\varphi(u)} = dt,$$

et, comme

(2) $$ds = u\,dt = \frac{u\,du}{\varphi(u)},$$

on aura, en intégrant (1) et (2) : d'une part,

(1') $$t - t_0 = \int_{u_0}^{u} \frac{du}{\varphi(u)}$$

et, d'autre part,

(2') $$s - s_0 = \int_{u_0}^{u} \frac{u\,du}{\varphi(u)};$$

d'où l'on tirera la loi du mouvement $s = F(t)$, en éliminant analytiquement ou graphiquement u entre (1') et (2').

Dans le cas $P < \varpi V$, le mouvement change de nature à partir du moment où le corps atteint la surface libre du fluide; car alors la force ϖV ne reste plus constante, mais diminue continûment au fur et à mesure de l'émersion. Il arrive un moment où $\varpi V = P$; alors le corps partiellement plongé reste en équilibre et devient un *corps flottant*.

Quels sont les caractères de la stabilité de l'équilibre pour les corps complètement plongés? Les conditions d'équilibre (ligne GC verticale et $P = \varpi V$) peuvent se réaliser de plusieurs façons. On peut, en effet, supposer : 1° les points G et C confondus : c'est le cas des corps plongés homogènes; 2° le point G en haut; 3° le point C en haut. Ces deux derniers cas, où les points G et C sont supposés séparés, appartiennent aux corps plongés non homogènes.

Dans le premier cas (G et C confondus), l'équilibre existe pour une orientation quelconque du corps dans l'intérieur du fluide; on dit alors que l'équilibre est *indifférent*.

Dans le deuxième cas (G en haut), l'équilibre existe tant que la ligne GC reste mathématiquement verticale; mais, dès qu'elle s'écarte, même d'une quantité infiniment petite, de la verticalité, on voit (*fig.* 134) que le jeu des forces agissantes P et ϖV tend à renverser le corps de 180° et à ramener G en bas. Le deuxième cas est donc dit d'équilibre *instable*.

Au contraire, dans le troisième cas (G en bas), si la ligne GC est écartée plus ou moins à un moment donné de la verticale, le

jeu des forces agissantes tend à ramener le corps dans la position où GC se trouve verticale avec G en bas. C'est la position d'équilibre *stable* (*fig.* 135).

On dira donc que, pour les corps entièrement plongés, la seule

Fig. 134.

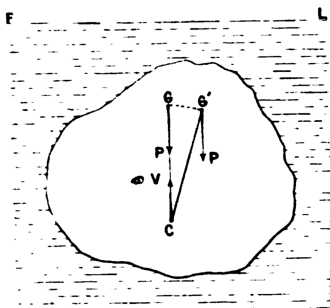
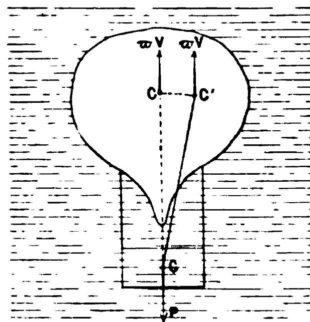


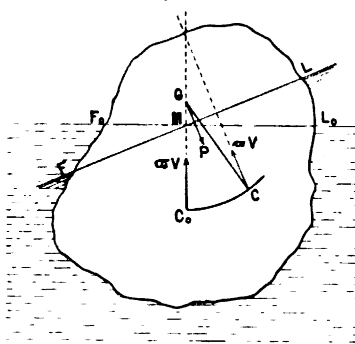
Fig. 135.



condition de stabilité de l'équilibre est que le centre de gravité se trouve au-dessous du centre de volume.

Quels sont, maintenant, les caractères de la stabilité de l'équilibre pour les corps flottants? Ici le problème est plus complexe, parce que le centre du volume immergé ne reste plus constant de position dans le corps, quel que soit le déplacement imaginé à partir de la position d'équilibre. Dans le cas des corps entièrement plongés, le couple des forces égales P et ϖV n'est un couple

Fig. 136.



de rappel que si G est au-dessous de C; tandis que, pour les corps flottants, nous allons voir que l'équilibre est stable, non seule-

ment quand le point G est au-dessous du point C, comme ci-dessus, mais encore, dans certaines circonstances, quand il est au-dessus. En effet, pour un corps flottant en équilibre avec la ligne GC verticale (*fig.* 136), dès qu'on écarte ce corps de la verticale, le point C cesse de rester le centre du volume immergé.

Si, par exemple, on incline le corps de telle façon que sa flottaison passe de F_0L_0 en FL, le volume s'accroissant de l'onglet L_0ML et diminuant d'un onglet égal F_0MF, le centre du volume, pour ces deux raisons, s'avancera de C_0 en C du côté de l'immersion, et il y aura stabilité de l'équilibre, c'est-à-dire retour à la flottaison primitive, même quand le point G se trouvera au-dessus de C_0, si le point C est venu assez en avant du côté de l'immersion pour que la nouvelle poussée passe encore du côté de l'immersion par rapport au point G. Il est évident d'ailleurs que, si la stabilité de l'équilibre subsiste dans le cas précédent, la valeur du couple de rappel sera, du moins, plus petite que si le point G s'était trouvé au-dessous de C_0.

Nous limiterons ici ces considérations préliminaires sur l'équilibre des corps plongés et flottants, car la stabilité de l'équilibre des corps flottants doit faire l'objet de toute la partie de cet Ouvrage intitulée : *Statique du navire*. Qu'il nous suffise d'avoir établi, dès maintenant, les différences caractéristiques qui existent, à ce point de vue, entre les corps plongés et les corps flottants.

76. Rappel de la théorie des moments d'inertie.

Quelques principes généraux de la théorie des moments d'inertie devant nous être nécessaires en Géométrie du navire, nous allons les rappeler rapidement ici.

On sait que le moment d'inertie d'un point matériel par rapport à un axe OL est le produit de la masse m du point par le carré de sa distance r à l'axe ; on a donc $I_{OL} = mr^2$.

Le moment d'inertie d'un solide par rapport à un axe OL est la somme des moments d'inertie, par rapport à cet axe, des points matériels composant le solide ; on a donc $I_{OL} = \Sigma mr^2$. On peut encore poser $I_{OL} = M.K_{OL}^2$, en désignant par M la masse du solide, et par K_{OL} une constante, qu'on appellera le *rayon de giration* du solide par rapport à l'axe OL.

Pour calculer le moment d'inertie ou le rayon de giration, par

rapport à l'axe Oz, d'un solide rapporté à trois axes rectangulaires Ox, Oy, Oz, on a, en désignant par ρ la masse spécifique,

$$I_{oz} = \Sigma m(x^2+y^2) = \int\int\int \rho\, dx\, dy\, dz (x^2+y^2)$$

et

$$M.K_{oz}^2 = K_{oz}^2 \int\int\int \rho\, dx\, dy\, dz$$
$$= \Sigma m(x^2+y^2) = \int\int\int \rho\, dx\, dy\, dz (x^2+y^2);$$

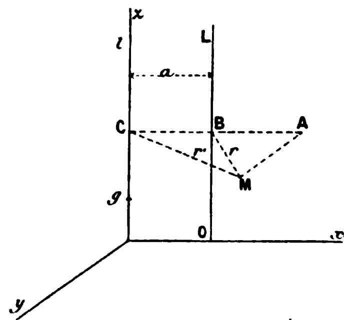
d'où

$$K_{oz}^2 = \frac{\int\int\int \rho\, dx\, dy\, dz (x^2+y^2)}{\int\int\int \rho\, dx\, dy\, dz}.$$

THÉORÈME I. — *Le moment d'inertie* I_{OL} *d'un solide par rapport à un axe quelconque* OL *est égal au moment d'inertie* I_{gl} *de ce solide par rapport à l'axe parallèle gl passant par son centre de gravité, augmenté du produit de la masse du solide par le carré de la distance des deux axes.*

Prenons pour plan des zx (*fig.* 137) le plan des deux axes parallèles OL et gl, et appelons a la distance de ces deux axes.

Fig. 137.



Pour un point M quelconque, on a

$$\overline{MB}^2 = \overline{MA}^2 + \overline{AB}^2;$$

$$r^2 = y^2 + (x-a)^2 = x^2 + y^2 + a^2 - 2ax = r'^2 + a^2 - 2ax;$$

on peut donc écrire

$$\Sigma mr^2 = \Sigma mr'^2 + a^2 \Sigma m - 2a \Sigma mx.$$

Mais, puisque l'axe gl passe par le centre de gravité, on a

$$\Sigma m x = 0;$$

donc il restera

$$I_{OL} = I_{gl} + M a^2.$$

Comme corollaire de ce théorème, on voit que, si l'on prend les moments d'inertie d'un corps par rapport à une série d'axes parallèles, le moment par rapport à celui de ces axes qui passe par le centre de gravité est minimum ; c'est ce que nous avions vu par les courbes intégrales (n° 31).

THÉORÈME II. — *Pour un solide rapporté à trois axes rectangulaires* Ox, Oy, Oz, *le moment d'inertie par rapport à un axe quelconque* OL *passant par l'origine, et faisant respectivement avec les trois axes les angles* α, β *et* γ, *s'exprime en fonction des moments et moments-produits d'inertie du solide par rapport aux axes et en fonction des angles* α, β, γ, *par la relation*

$$(1)\quad \begin{cases} I_{OL} = I_{ox}\cos^2\alpha + I_{oy}\cos^2\beta + I_{oz}\cos^2\gamma \\ \qquad - 2P_{oyz}\cos\beta\cos\gamma - 2P_{oxz}\cos\gamma\cos\alpha - 2P_{oxy}\cos\alpha\cos\beta. \end{cases}$$

Nous appelons ici *moment-produit d'inertie* d'un solide par rapport à l'un des axes de coordonnées la somme des produits de la masse de chaque point matériel du solide par ses deux coordonnées situées dans le plan perpendiculaire à l'axe. On a donc

Moment-produit d'inertie par rapport à l'axe $Ox = P_{oyz} = \Sigma myz$,
Moment-produit d'inertie par rapport à l'axe $Oy = P_{oxz} = \Sigma mxz$,
Moment-produit d'inertie par rapport à l'axe $Oz = P_{oxy} = \Sigma mxy$.

Cela posé, pour démontrer la relation (1), il suffit de projeter chaque point matériel M du solide sur l'axe OL en H, et de considérer le triangle OMH (*fig.* 138), qui donne

$$\overline{MH}^2 = \overline{OM}^2 - \overline{OH}^2$$

ou

$$r^2 = (x^2 + y^2 + z^2) - (x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma)^2$$

ou encore, en développant et en usant de la relation

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

pour remplacer $1 - \cos^2\alpha$ par $\cos^2\beta + \cos^2\gamma$, $1 - \cos^2\beta$ par $\cos^2\alpha + \cos^2\gamma$, $1 - \cos^2\gamma$ par $\cos^2\alpha + \cos^2\beta$,

$$r^2 = (y^2 + z^2)\cos^2\alpha + (x^2 + z^2)\cos^2\beta + (x^2 + y^2)\cos^2\gamma$$
$$- 2yz\cos\beta\cos\gamma - 2xz\cos\alpha\cos\gamma - 2xy\cos\alpha\cos\beta;$$

d'où enfin, en multipliant par m pour chaque point et faisant la somme, l'équation (1) à démontrer.

Fig. 138.

THÉORÈME III. — *Si l'on calcule les moments d'inertie d'un solide rapporté à trois axes rectangulaires par rapport à un faisceau d'axes passant par l'origine* O, *et si l'on porte sur chacun de ces axes, à partir de l'origine, une longueur* ON, *égale à l'inverse de la racine carrée du moment d'inertie correspondant, le lieu des points* N *est un ellipsoïde fixe de position par rapport au solide, et qu'on appelle l'*ellipsoïde d'inertie *du corps relatif au point* O.

Soient, en effet, X, Y, Z les coordonnées du point N sur l'axe OL (*fig.* 139). On sait que $ON = \frac{1}{\sqrt{I_{OL}}}$; donc on a

$$X = \frac{1}{\sqrt{I_{OL}}}\cos\alpha, \qquad Y = \frac{1}{\sqrt{I_{OL}}}\cos\beta, \qquad Z = \frac{1}{\sqrt{I_{OL}}}\cos\gamma;$$

I_{OL} est d'ailleurs donné en fonction des moments et produits d'inertie constants par rapport aux axes, et en fonction des angles α, β, γ, par la formule (1) du théorème précédent.

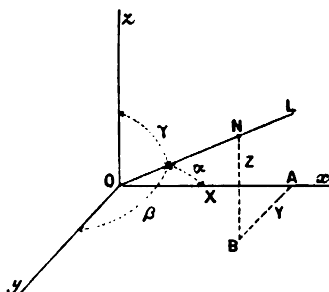
Enfin on connaît une cinquième relation,

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1,$$

entre les quantités considérées.

On pourra donc éliminer les variables I_{OL}, α, β et γ entre ces cinq équations, et il restera une équation ne contenant plus que X, Y, Z et des constantes, qui sera l'équation du lieu du point N.

Fig. 139.



Pour faire cette élimination, nous tirerons $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ des trois premières relations, et nous porterons leurs valeurs dans l'équation (1); il se trouve alors que I_{OL} s'élimine de lui-même, et il reste pour équation du lieu cherché

$$1 = I_{ox}X^2 + I_{oy}Y^2 + I_{oz}Z^2 - 2P_{oxy}XY - 2P_{oxz}XZ - 2P_{oyz}YZ.$$

C'est celle d'un ellipsoïde ayant pour centre l'origine, et qui a reçu de Poinsot le nom d'*ellipsoïde d'inertie*.

Les axes de l'ellipsoïde sont les axes principaux d'inertie relatifs au point O, et les moments d'inertie correspondants sont les moments d'inertie principaux du point O. Pour trouver les axes principaux, on fait un changement de coordonnées et l'on amène les anciens axes Ox, Oy, Oz en trois positions rectangulaires nouvelles, Oa, Ob, Oc, telles que, par rapport à ces nouveaux axes, les produits $P_{oab} = 0$, $P_{obc} = 0$ et $P_{oca} = 0$. L'équation de l'ellipsoïde du point O, rapporté à ses axes, est alors

$$1 = I_{oa}X^2 + I_{ob}Y^2 + I_{oc}Z^2,$$

et l'on aura, pour le moment d'inertie par rapport à un axe OL', faisant avec Oa, Ob, Oc les angles α', β', γ',

$$I_{OL'} = I_{oa}\cos^2\alpha' + I_{ob}\cos^2\beta' + I_{oc}\cos^2\gamma'.$$

Les longueurs des trois axes de l'ellipsoïde du point O sont les inverses des racines carrées de I_{oa}, I_{ob}, I_{oc}.

77. Définition de certains termes usités en Géométrie du navire.

On appelle *flotteur* un solide matériel, à contour extérieur fermé, dont le poids est inférieur à celui d'un volume, égal à son volume total, du liquide dans lequel on le suppose partiellement immergé. L'hypothèse du contour extérieur fermé est nécessaire pour que le solide ne puisse être envahi, quels que soient les déplacements qu'on lui fasse subir à la surface du liquide. Il est clair dès lors que, si l'on s'impose la restriction de ne considérer que des déplacements limités, on pourra donner le nom de *flotteur* à des solides, même ouverts dans les régions que le liquide ne doit jamais atteindre. C'est le cas des navires en général.

On appelle *plan de flottaison,* ou simplement *flottaison,* le plan du niveau du liquide où le solide est immergé. On prend d'habitude pour *flottaison initiale* l'une des flottaisons d'équilibre du flotteur.

La *ligne de flottaison* est l'intersection, par le plan de la flottaison, de la surface extérieure du flotteur.

L'*aire de la flottaison* est la surface comprise à l'intérieur de la ligne de flottaison dans le plan de flottaison.

Le *volume de carène,* ou simplement la *carène,* est la portion immergée du volume du flotteur.

Le *centre de carène* est le centre de gravité du volume de carène.

On appelle *isocarène* (terme introduit en Géométrie du navire en 1814, par Ch. Dupin) une carène différente de celle limitée par la flottaison initiale, mais ayant le même volume que cette dernière.

Un *axe d'inclinaison* est une droite horizontale, intersection de la flottaison initiale avec une autre flottaison quelconque limitant une isocarène. On appelle *plan d'inclinaison* un plan perpendiculaire à l'axe d'inclinaison.

Le lieu géométrique des centres des isocarènes d'une certaine carène initiale, de volume V_0, est une surface qui a reçu le nom de *surface* (C) de ces isocarènes de volume V_0.

La surface enveloppe des flottaisons qui limitent les isocarènes d'une certaine carène initiale, de volume V_0, est désignée sous le nom de *surface* (F) de ces isocarènes de volume V_0.

Enfin, en 1887, M. Guyou, capitaine de frégate, a considéré, dans sa *Théorie du Navire* (1), le lieu des centres de figure des tranches isocarènes d'un volume déterminé u, additif à un volume de carène donné V_0, et a appelé ce lieu la *surface* (T) des tranches isocarènes de volume u, additives au volume V_0.

La Géométrie du navire n'est autre chose en somme que la Géométrie des surfaces (C), (F) et (T), relatives à des isocarènes de volume déterminé. C'est l'introduction nécessaire à la Statique du navire, puisque, dans les questions de stabilité de l'équilibre des corps flottants, il est avant tout nécessaire de savoir placer le centre de carène, qui, lui, est un élément purement géométrique de la question, dépendant uniquement des formes du solide, qui sont ou peuvent venir en contact avec le liquide.

78. Décomposition du déplacement le plus général d'un flotteur.

Nous allons chercher comment on peut passer géométriquement de la position d'équilibre initiale du flotteur à une autre position quelconque. Le déplacement le plus général d'un solide peut être obtenu au moyen de trois translations dx, dy, dz suivant trois axes rectangulaires quelconques, suivies de trois rotations $d\alpha$, $d\beta$, $d\gamma$ autour de ces mêmes axes. Mais, dans le cas particulier qui nous occupe, les translations dx et dy, horizontales, ne changeraient pas la position relative du flotteur par rapport au liquide ambiant supposé indéfini. Il en serait de même pour la rotation $d\gamma$ autour de l'axe vertical. Ces mouvements géométriques conduiraient à une carène identique à la carène initiale.

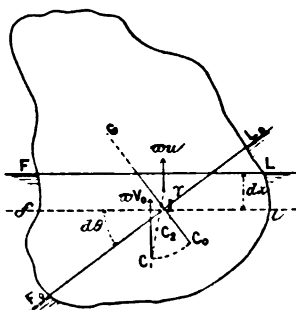
Pour faire passer géométriquement la carène de sa valeur initiale à une autre quelconque, il nous suffira donc de considérer une translation verticale dz et deux rotations autour d'axes horizontaux perpendiculaires, $d\alpha$ et $d\beta$, lesquelles se composeront en une rotation unique $d\theta$ autour d'un certain axe horizontal.

En effet, soit F_0L_0 la flottaison initiale que nous pouvons supposer tracée invariablement sur la surface extérieure du flotteur (*fig.* 140). Pour amener le flotteur de la flottaison F_0L_0 à une flottaison finale FL, il suffit de le faire tourner autour d'un *axe d'inclinaison* horizontal I, intersection de F_0L_0 avec la flottaison

(1) *Théorie du Navire;* par M. E. Guyou. Paris, 1887. Berger-Levrault.

fl, parallèle à FL, qui limite l'isocarène de la carène initiale; et cela d'un angle $d\theta$ égal à l'angle des flottaisons initiale et finale. Le flotteur aura alors la flottaison *fl*. On lui donnera ensuite une translation verticale dz égale à la distance des flottaisons *fl* et FL, qui lui fera prendre la flottaison finale FL.

Fig. 140.



Voyons de quelle manière, après les déplacements géométriques $d\theta$ et dz, se trouveront modifiées les forces statiques qui agissent sur le flotteur. Après le premier mouvement, la carène ayant conservé son volume, la poussée aura conservé sa valeur, ϖV_0, mais elle ne sera plus appliquée au point C_0. Son point d'application sera venu en C_1, du côté de l'immersion. Après la translation verticale, qui dans le cas de la figure est une immersion, une nouvelle poussée sera venue s'ajouter à ϖV_0 ; ce sera ϖu égale au poids du liquide déplacé par la tranche *fl*FL et appliquée au centre de figure γ de cette tranche. Si, au lieu de subir en second lieu une immersion, le solide avait subi une émersion, ce serait une diminution de poussée, $-\varpi u$, qui serait venue ajouter son effet à celui de la poussée primitive ϖV_0. La poussée définitive $\varpi(V_0 \pm u)$ est appliquée en un certain point C_2 situé sur la ligne $C_1\gamma$.

Après les deux mouvements, la poussée n'est plus égale au poids P du solide, et la ligne joignant le centre de gravité G du corps au point C_2 n'est plus en général verticale. Il n'y a donc plus équilibre et le corps abandonné à lui-même dans ces conditions ne restera pas en repos.



CHAPITRE XIV.

GÉOMÉTRIE DE LA SURFACE (C) DES ISOCARÈNES DE VOLUME V_0.

79. Étude de la surface (C) et de sa courbure autour d'un point.

Théorème I ou théorème d'Euler. — *Deux flottaisons isocarènes infiniment voisines se coupent suivant une droite passant par le centre de gravité de chacune d'elles.*

En effet, les deux flottaisons, ne pouvant être parallèles, puisqu'elles limitent des isocarènes, se coupent, et cela sous un angle infiniment petit $d\theta$, puisqu'elles sont infiniment voisines. Ces deux flottaisons détachent un onglet immergé de volume v_i et un onglet émergé de volume v_e égal à v_i. Évaluons ces volumes par le théorème de Guldin, en appelant u_i la portion de l'aire de la flottaison initiale située du côté de l'immersion et x_i la distance à l'intersection (ou axe d'inclinaison) de son centre de gravité; u_e la portion située du côté de l'émersion et x_e la distance à l'axe d'inclinaison de son centre de gravité : nous aurons

$$v_i = v_e,$$

$$u_i x_i \, d\theta = u_e x_e \, d\theta,$$

c'est-à-dire

$$u_i x_i = u_e x_e$$

ou

$$u_i x_i - u_e x_e = 0.$$

Donc le centre de gravité général de la flottaison initiale se trouve sur l'axe d'inclinaison, intersection des deux flottaisons infiniment voisines, et il en est de même pour la seconde flottaison, à laquelle notre raisonnement eût pu s'appliquer.

Théorème II. — *Le plan tangent à la surface* (C), *en un*

point C, *centre de carène correspondant à une certaine flottaison* FL, *est parallèle à cette flottaison* FL (*fig.* 141).

Soit, en effet, FL une flottaison quelconque, prise parmi les flottaisons des isocarènes de volume V_0 considérées, et à laquelle correspond un centre de carène C. Menons par C trois axes rectangulaires de la façon suivante : CZ, perpendiculaire à la flottaison FL, CY parallèle à l'intersection *gy* de FL avec une flottaison isocarène infiniment voisine quelconque F′L′, et CX perpendiculaire à CZ et à CY. Si le plan XCY, parallèle à FL, est tangent en C à la surface (C) des isocarènes de FL, le point C′, correspondant à l'isocarène infiniment voisine quelconque F′L′, devra être à une distance ζ de ce plan infiniment petite du deuxième ordre.

Fig. 141.

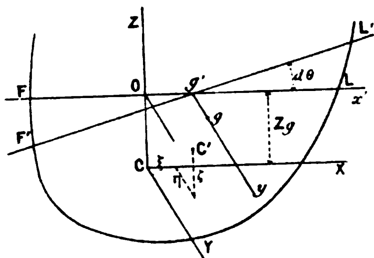
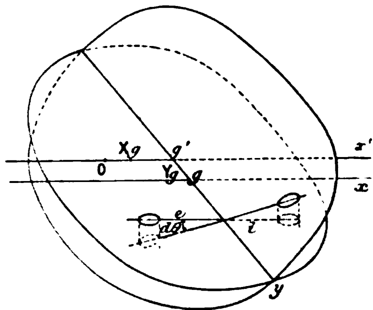


Fig. 142.



Cherchons donc l'expression de ζ. Pour cela, nous exprimerons qu'en C′ est appliquée une poussée ϖV_0 (ϖ poids spécifique du liquide), laquelle est la résultante des forces suivantes : ϖV_0, appliquée en C; ϖv_i, appliquée au centre de figure de l'onglet immergé; et $-\varpi v_e$, appliquée au centre de figure de l'onglet émergé. Prenons les moments de toutes ces forces parallèles, ou plutôt des forces proportionnelles V_0, v_i et $-v_e$, par rapport au plan XCY. Nous aurons, en appelant z_i et z_e les distances, au plan des moments, des centres de figure des onglets,

$$V_0 \zeta = V_0\, o + v_i z_i - v_e z_e = v_i z_i - v_e z_e.$$

Or le moment $v_i z_i$ peut se calculer par une somme de moments élémentaires. Prenons dans la flottaison FL (*fig.* 142) un élément d'aire $d\omega_i$ situé à la distance i de l'intersection *gy*, ce sera la base d'un cylindre élémentaire de hauteur $i\,d\theta$, dont le centre de gra-

vité sera à la hauteur $\frac{i\,d\theta}{2}$ au-dessus de FL et, par suite (en appelant Z_g la distance du point C à FL), à la distance $Z_g + \frac{i\,d\theta}{2}$ du plan des moments. On aura donc

$$v_i z_i = \int d\omega_i\, i\, d\theta \left(Z_g + \frac{i\,d\theta}{2}\right).$$

De même, pour le moment de la force $-v_e$, on prendra des volumes élémentaires $d\omega_e e d\theta$, auxquels on donnera le signe — pour que les lettres ne représentent partout que des quantités absolues, ce qui donnera

$$-v_e z_e = \int (-d\omega_e\, e\, d\theta)\left(Z_g - \frac{e\,d\theta}{2}\right);$$

d'où enfin

$$V_0 \zeta = d\theta\, Z_g \left(\int i\, d\omega_i - \int e\, d\omega_e\right) + \frac{d\theta^2}{2}\left(\int i^2\, d\omega_i - \int e^2\, d\omega_e\right).$$

Or, la ligne d'intersection gy passant par le centre de gravité g de l'aire de FL, la première parenthèse est nulle; et il reste

$$V_0 \zeta = \frac{d\theta^2}{2}\left(\int i^2\, d\omega_i + \int e^2\, d\omega_e\right),$$

c'est-à-dire

$$V_0 \zeta = \frac{d\theta^2}{2} I_{gy},$$

en désignant par I_{gy} le moment d'inertie de l'aire de la flottaison par rapport à l'axe d'inclinaison gy.

On voit bien ainsi que ζ est infiniment petit du second ordre.

C. Q. F. D.

Corollaire. — La poussée du liquide pour une carène de volume V_0 ayant son centre en C s'exerce suivant la normale en C à la surface (C) des isocarènes de volume V_0.

THÉORÈME III. — *La surface* (C) *est convexe et fermée.*

La surface (C) est convexe, car nous venons d'obtenir la relation

$$V_0 \zeta = v_i z_i - v_e z_e,$$

c'est-à-dire

$$V_0 \zeta = v_i (z_i - z_e),$$

puisque $v_i = v_e$.

Mais z_i est toujours plus grand que z_e, donc ζ est toujours positif. Dès lors, tous les points voisins de C étant constamment du même côté du plan tangent, la surface (C) est une surface convexe.

C'est de plus une surface fermée si, comme nous le supposons ici, le flotteur est lui-même fermé et peut prendre tous les déplacements isocarènes possibles. En effet, la surface (C) est convexe, continue, possède des plans tangents parallèles à toutes les directions possibles, et tous ses points sont intérieurs au flotteur, surface fermée : c'est donc elle-même une surface fermée.

Corollaire. — L'indicatrice de la surface (C) est toujours une ellipse.

THÉORÈME IV. — *Dans le système d'axes* CXYZ, *les coordonnées* ξ, η, ζ *d'un centre de carène* C', *infiniment voisin de* C, *ont pour valeurs*

$$\xi = d\theta \frac{I_{gy}}{V_0}, \qquad \eta = d\theta \frac{P_{gxy}}{V_0} \qquad \text{et} \qquad \zeta = \frac{d\theta^2}{2} \frac{I_{gy}}{V_0}.$$

Le théorème II nous a déjà donné la valeur ci-dessus de ζ; restent à calculer ξ et η.

Nous opérerons comme au théorème II, en prenant seulement les moments par rapport aux plans CYZ et CXZ, et non plus par rapport à CXY.

Nous aurons d'abord, avec CYZ comme plan des moments,

$$V_0 \xi = V_0 \, o + v_i x_i - v_e x_e = v_i x_i - v_e x_e;$$

puis, en appelant X_g la distance $g'O$ au plan ZCY de l'intersection gy, nous prendrons les moments des volumes élémentaires par rapport à ZCY de la façon suivante : 1° moment du volume élémentaire par rapport au plan parallèle à ZCY, passant par gy; 2° moment du volume élémentaire, supposé transporté sur le plan gy, par rapport au plan ZCY.

La somme des premiers moments n'est autre que le moment des onglets par rapport à un plan perpendiculaire à leur feuillet origine (n° 4); la somme des autres moments est nulle, puisque la somme des volumes élémentaires, à transporter sur le plan gy à la

distance constante X_g du plan ZCY, est nulle. On a donc

$$\begin{aligned} v_i x_i - v_e(\pm x_e) &= \int_N^R d\omega_i\, i\, d\theta\, i + \int_N^R (-d\omega_e\, e\, d\theta)(-e) \\ &= d\theta \left(\int_N^R i^2\, d\omega_i + \int_N^R e^2\, d\omega_e \right) \\ &= I_{gy}\, d\theta; \end{aligned}$$

d'où enfin

$$V_0\, \xi = I_{gy}\, d\theta.$$

Corollaire. — La coordonnée ξ est la dérivée de ζ par rapport à θ.

Opérons maintenant pour η comme pour les coordonnées ζ et ξ, mais en prenant les moments par rapport au plan ZCX. Il vient d'abord

$$V_0\, \eta = v_i(\pm y_i) - v_e(\pm y_e).$$

Pour prendre ensuite les moments des volumes élémentaires par rapport à ZCX, on les prendra d'abord par rapport à un plan parallèle gx passant par le centre de gravité g de la flottaison et situé par suite à une distance de ZCX égale à la distance Y_g du point g à ce plan (*fig.* 142); puis on supposera tous les volumes élémentaires transportés dans le plan passant par gx et l'on prendra de nouveau leurs moments par rapport à ZCX; mais cette seconde opération donne un résultat nul, puisque la somme des volumes transportés à la distance constante Y_g de ZCX est nulle. Il reste donc

$$\begin{aligned} v_i(\pm y_i) - v_e(\pm y_e) = &\int_g^N (d\omega_i\, i\, d\theta)\, l_N + \int_g^R (d\omega_i\, i\, d\theta)(-l_R) \\ &+ \int_g^N (-d\omega_e\, e\, d\theta)\, l_N + \int_g^R (-d\omega_e\, e\, d\theta)(-l_R), \end{aligned}$$

en appelant l_N et l_R les distances des volumes élémentaires à gx en valeur absolue. On voit que le second membre n'est autre que le produit d'inertie de l'aire de la flottaison par rapport aux axes gx et gy, multiplié par le facteur commun $d\theta$; d'où

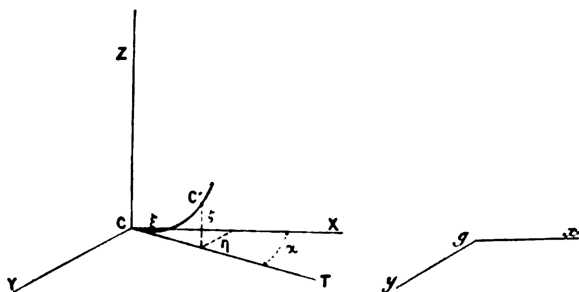
$$V_0\, \eta = P_{gxy}\, d\theta.$$

Théorème V. — *Pour un axe d'inclinaison de direction constante, parallèle à gy, le point* C *décrit dans l'espace une*

courbe dont la tangente à l'origine, située dans le plan tangent XCY, *fait avec le plan d'inclinaison* ZCX *un angle* α *tel que* $\tang \alpha = \frac{P_{gxy}}{I_{gy}}$ (*fig.* 143).

En effet, si l'axe d'inclinaison reste constamment parallèle à une direction fixe gy, les centres des isocarènes successives s'éloignent de C suivant une certaine courbe dont le premier élément CC′ est situé dans le plan ZCT, lequel fait avec ZCX l'angle α, tel que $\tang \alpha = \frac{\eta}{\xi} = \frac{P_{gxy}}{I_{gy}}$. Or la tangente en C à cette courbe est l'intersection CT du plan ZCT avec le plan ZCX tangent en C à la surface (C) des isocarènes considérées. Cette tangente fait donc bien l'angle α avec le plan d'inclinaison, puisqu'elle est dans le plan XCY, perpendiculaire à l'intersection CZ des deux plans faisant l'angle α.

Fig. 143.



Théorème VI. — *Pour un axe d'inclinaison de direction variable* gy, *faisant avec une direction fixe* gl *un angle variable* β, *les coordonnées d'un centre de carène isocarène* C′ *infiniment voisin du premier* C, *dans le système d'axes fixes* CZLM (*fig.* 144), *où* CL *est parallèle à la direction fixe* gl, *ont pour expressions*

$$\zeta = \frac{d\theta^2}{2V_0}(I_{gl}\cos^2\beta + I_{gm}\sin^2\beta + 2P_{glm}\sin\beta\cos\beta),$$

$$\xi_1 = \frac{d\theta}{V_0}(I_{gl}\cos\beta + P_{glm}\sin\beta),$$

$$\eta_1 = \frac{d\theta}{V_0}(I_{gm}\sin\beta + P_{glm}\cos\beta).$$

En effet, en prenant dans le plan tangent deux axes rectangulaires coïncidant avec une parallèle à l'axe d'inclinaison CY, et avec la trace du plan d'inclinaison CX, nous avons trouvé

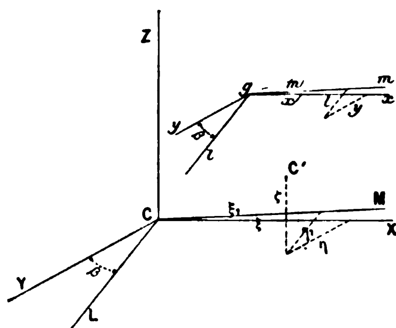
$$\zeta = \frac{d\theta^2}{2} \frac{I_{gy}}{V_0},$$

$$\xi = d\theta \frac{I_{gy}}{V_0},$$

$$\eta = d\theta \frac{P_{gxy}}{V_0}.$$

Faisons une transformation de coordonnées en prenant mainte-

Fig. 144.



nant pour axes, dans ce même plan tangent en C, les deux directions fixes perpendiculaires CL et CM (*fig.* 144). On aura

$$\xi_1 = \xi \cos\beta - \eta \sin\beta = \frac{d\theta}{V_0}(I_{gy}\cos\beta - P_{gxy}\sin\beta),$$

$$\eta_1 = \xi \sin\beta + \eta \cos\beta = \frac{d\theta}{V_0}(I_{gy}\sin\beta + P_{gxy}\cos\beta).$$

D'autre part, nous avons vu, dans la théorie des moments d'inertie, que

$$I_{gy} = I_{gl}\cos^2\beta + I_{gm}\sin^2\beta + 2P_{glm}\cos\beta\sin\beta.$$

De plus P_{gxy} peut s'exprimer en fonction de P_{glm}, car on a

$$P_{gxy} = \Sigma\mu xy,$$

μ masse ou aire d'un élément de la flottaison.

Or

$$x = \quad m\cos\beta + l\sin\beta,$$
$$y = -m\sin\beta + l\cos\beta;$$

d'où

$$xy = -m^2\sin\beta\cos\beta + l^2\sin\beta\cos\beta + lm(\cos^2\beta - \sin^2\beta)$$

et

$$\Sigma\mu xy = -\Sigma\mu m^2\sin\beta\cos\beta + \Sigma\mu l^2\sin\beta\cos\beta + \Sigma\mu lm(\cos^2\beta - \sin^2\beta),$$

c'est-à-dire

$$P_{gxy} = (-I_{gl} + I_{gm})\sin\beta\cos\beta + P_{glm}(\cos^2\beta - \sin^2\beta)$$
$$= (I_{gm} - I_{gl})\frac{\sin 2\beta}{2} + P_{glm}\cos 2\beta.$$

En remplaçant, dans ξ_1 et η_1, I_{gy} et P_{gxy} par leurs valeurs en fonction de I_{gl}, I_{gm} et P_{glm}, on trouve

$$\xi_1 = \frac{d\theta}{V_0}(I_{gl}\cos\beta + P_{glm}\sin\beta),$$
$$\eta_1 = \frac{d\theta}{V_0}(I_{gm}\sin\beta + P_{glm}\cos\beta).$$

De son côté, ζ devient

$$\zeta = \frac{d\theta^2}{2V_0}(I_{gl}\cos^2\beta + I_{gm}\sin^2\beta + 2P_{glm}\sin\beta\cos\beta).$$

Corollaire I. — L'équation de l'indicatrice en C se déduira des trois équations ci-dessus en faisant $\zeta =$ const. et en éliminant entre elles $d\theta$ et β.

Corollaire II. — Si l'on prend pour directions fixes des axes horizontaux celles des axes d'inertie principaux gl', gm' de la flottaison FL, les coordonnées du point C′ se simplifient et deviennent

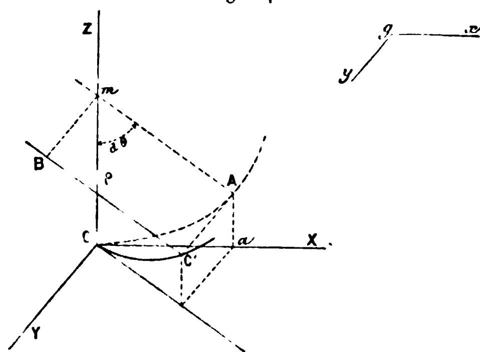
$$\xi'_1 = \frac{d\theta}{V_0}I_{gl'}\cos\beta',$$
$$\eta'_1 = \frac{d\theta}{V_0}I_{gm'}\sin\beta',$$
$$\zeta = \frac{d\theta^2}{2V_0}(I_{gl'}\cos^2\beta' + I_{gm'}\sin^2\beta').$$

Théorème VII. — *Le pied sur la normale en* C *de la perpen-*

diculaire commune à cette normale et à la normale infiniment voisine en C′ est le centre de courbure de la section droite du cylindre qui projette orthogonalement la surface (C) *sur le plan d'inclinaison.*

Prenons (*fig.* 145) trois axes rectangulaires passant par C et menés de la façon suivante : CZ perpendiculaire à la flottaison FL, c'est-à-dire au plan tangent en C à la surface (C), c'est-à-dire encore normale en C à la surface (C); CX trace du plan d'inclinaison sur le plan tangent; CY parallèle à l'axe d'inclinaison. Soit

Fig. 145.



C′ le centre de l'isocarène infiniment voisine obtenue par une inclinaison $d\theta$ autour de l'axe d'inclinaison parallèle à CY. Projetons le point C′ en A sur le plan d'inclinaison. C′A, parallèle à CY, est par suite parallèle à l'intersection des deux flottaisons infiniment voisines FL et F′L′. Donc C′A est parallèle à F′L′, c'est donc une droite du plan tangent en C′ à la surface (C).

Menons maintenant en C′ la normale à la surface (C). Cette droite C′B est perpendiculaire à toutes les droites du plan tangent en C′ et, en particulier, à C′A. Mais C′B, étant perpendiculaire à C′A, est comprise dans un plan perpendiculaire à C′A en C′; elle est donc dans un plan parallèle à ZCX. Dès lors, C′A mesure la plus courte distance de CZ et de C′B, et, d'autre part, le pied de cette plus courte distance s'obtiendra en projetant orthogonalement C′B sur ZCX et se trouvera à l'intersection *m*. Reste à prouver que ce point *m* est le centre de courbure de la section par ZCX du cylindre de contour apparent de la surface (C) dont les génératrices sont parallèles à CY.

Pour cela, nous remarquerons que C′A est une parallèle à CY, tangente à la surface (C) en C′; c'est donc une génératrice du cylindre considéré, touchant la surface (C) en C′. Nous remarquerons, de plus, que le plan tangent en C′ à la surface (C) est en même temps tangent au cylindre le long de la génératrice C′A. En effet, la courbe de contour apparent, qui passe en C′, est commune à la surface (C) et au cylindre; or le plan tangent à la surface (C) en C′ et le plan tangent au cylindre le long de C′A contiennent, l'un comme l'autre : 1° la tangente ou génératrice C′A; 2° la tangente à la courbe commune de contour apparent. Ces deux plans tangents se confondent donc.

Mais C′B est normale au plan tangent, donc normale au cylindre; le plan de C′B et de la génératrice C′A est donc le plan normal au cylindre le long de C′A. Donc la parallèle *m*A, dans ce plan, à C′B est normale en A au cylindre, et est normale, en particulier en A, à la section droite CA de ce cylindre. Dès lors, le point *m*, point de rencontre des deux normales infiniment voisines, CZ et A*m*, de la section droite CA du cylindre de contour apparent de la surface (C), est bien le centre de courbure de cette section plane en C.

THÉORÈME VIII. — *Le rayon de courbure* $\overline{mC}$ *en* C *de la section droite du cylindre projetant la surface* (C) *orthogonalement sur un certain plan d'inclinaison* ZCX, *ou encore parallèlement à un certain axe d'inclinaison gy* (*fig.* 145), *a pour valeur*

$$\rho = \frac{I_{gy}}{V_0}.$$

On a, en effet, sur la *fig.* 145, en remarquant que l'angle des deux normales CZ et A*m* est précisément égal à $d\theta$,

$$\overline{Ca} \quad \text{ou} \quad \xi = \rho\, d\theta;$$

d'où l'on tire

$$\rho = \frac{\xi}{d\theta} = \frac{I_{gy}}{V_0}. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

THÉORÈME IX. — *Le rayon de courbure en* C *de la section plane normale à la surface* (C), *passant par la normale* CZ *et par le centre de carène infiniment voisin* C′, *correspondant à l'inclinaison autour d'un certain axe gy* (*fig.* 145), *a pour*

valeur

$$\rho_1 = \frac{1}{V_0}\left[\frac{I_{gy}^2 + P_{gxy}^2}{I_{gy}}\right]$$

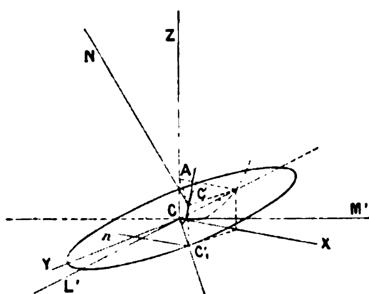
ou encore

$$\rho_1 = \rho + \frac{1}{\rho}\,\frac{P_{gxy}^2}{V_0^2}.$$

On a, en effet,

$$2\rho_1\zeta = \overline{C'A}^2 = \eta^2 + \xi^2;$$

Fig. 146.



d'où, en remplaçant ξ, η et ζ par les valeurs trouvées précédemment (théorèmes II, IV et V),

$$2\rho_1 \frac{d\theta^2}{2V_0} I_{gy} = \frac{d\theta^2}{V_0^2}\left[I_{gy}^2 + P_{gxy}^2\right],$$

soit

$$\rho_1 = \frac{1}{V_0}\left[\frac{I_{gy}^2 + P_{gxy}^2}{I_{gy}}\right]$$

ou encore

$$\rho_1 = \rho + \frac{1}{\rho}\,\frac{P_{gxy}^2}{V_0^2},$$

puisque

$$\rho = \frac{I_{gy}}{V_0}. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Corollaire I. — Les rayons vecteurs C'A ou CC'_1 (*fig.* 146), de l'indicatrice en C, sont proportionnels à $\sqrt{\rho_1}$.

Corollaire II. — Dans une section normale quelconque CC' en C de la surface (C), les normales à la surface, en deux points infiniment voisins de la section, ne se rencontrent pas, puisque la

normale en C se projette au point C, et la normale C′N en C′ suivant la normale $C'_1 n$ à l'ellipse indicatrice en C'_1.

Corollaire III. — Les sections normales principales de la surface (C) en C, c'est-à-dire les sections normales dans lesquelles la normale au point C′ infiniment voisin de C rencontre la normale en C, sont dirigées suivant les axes de l'indicatrice du point C.

Théorème X. — *Les tangentes aux deux lignes de courbure de la surface* (C) *en* C *sont parallèles aux axes d'inertie principaux gl′ et gm′ de la flottaison* FL *correspondant au point* C (*fig.* 147).

Soit, en effet, la flottaison FL. Construisons l'ellipse d'inertie de cette flottaison pour son centre de gravité g. On sait que, pour cette construction, il faut porter sur chaque direction gy horizontale passant par g une longueur $gE = \frac{1}{\sqrt{I_{gy}}}$; l'ellipse est le lieu des points tels que E.

Fig. 147.

Supposons donc cette ellipse construite. Si nous prenons pour axe d'inclinaison l'un des axes de cette ellipse, ou axe principal d'inertie, gl' par exemple, on aura $P_{gl'm'} = 0$ et, par suite, $\eta = 0$. Donc, pour cet axe d'inclinaison gl', le point C′ infiniment voisin de C se trouve dans le plan ZCM′; donc la normale en ce point C′ à la surface (C) coupe la normale CZ du point C; donc CM′, parallèle à gm', est la tangente à l'une des sections principales de la surface (C) en C, et l'on démontrerait de la même façon que CL′, parallèle à gl', est la tangente à l'autre section principale de la surface (C) en C.

Corollaire I. — Dans le voisinage du point C, une section normale principale de la surface (C) en C est en même temps section droite du cylindre qui projette orthogonalement la surface (C) sur le plan de cette section principale, puisque $\eta = 0$, et que, par suite, le point C′, de contour apparent pour l'axe d'inclinaison gl', se trouve précisément dans le plan d'inclinaison, plan de la section

droite. Les rayons de courbure principaux en C, R_1 et r_1, sont donc les valeurs particulières, maxima et minima, R et r, de ρ.

Corollaire II. — L'indicatrice de la surface (C) en C a ses axes parallèles aux axes d'inertie principaux gl' et gm' de la flottaison FL, puisque les axes de l'indicatrice ne sont autres que les tangentes CL′ et CM′ aux lignes de courbure de la surface (C) en C.

Théorème XI. — *L'indicatrice en* C *de la surface* (C) *a même orientation que l'ellipse d'inertie de la flottaison* FL *en g. De plus, ces deux ellipses sont géométriquement semblables* (*fig.* 147).

En effet, le rayon vecteur maximum gl', ou grand axe, de l'ellipse d'inertie est celui qui correspond au moment d'inertie minimum $I_{gl'}$, puisqu'il a pour mesure $\frac{1}{\sqrt{I_{gl'}}}$.

Or nous savons que, pour l'axe d'inclinaison gl', le point C est dans le plan d'inclinaison ZCM′, et que ξ a pour valeur

$$\xi = \frac{d\theta}{V_0} I_{gl'} \qquad \text{ou} \qquad \xi = \sqrt{I_{gl'}} \sqrt{\frac{2h}{V_0}},$$

en exprimant $d\theta$ en fonction de la distance $\zeta = h$ du plan de l'indicatrice au plan tangent en C à la surface (C).

Donc le rayon vecteur correspondant de l'ellipse indicatrice CM′ est alors minimum : c'est le petit axe, lequel est perpendiculaire sur CL′, c'est-à-dire sur gl', c'est-à-dire sur le grand axe de l'ellipse d'inertie; donc, dans les deux ellipses, les grands axes et les petits axes ont même orientation.

Pour démontrer maintenant que les deux ellipses sont géométriquement semblables, nous appellerons A, B les demi-axes de l'ellipse d'inertie de la flottaison; *a*, *b* les demi-axes de l'indicatrice, et nous remarquerons que l'on a

$$A = \frac{1}{\sqrt{I_{gl'}}}, \qquad B = \frac{1}{\sqrt{I_{gm'}}}.$$

Or, dans la section principale ZCM′ en C, on a

$$\overline{CM'}^2 = b^2 = 2 r_1 \zeta.$$

et, dans la section normale principale ZCL′,

$$\overline{CL'}^2 = a^2 = 2R_1\zeta.$$

Mais, d'après le corollaire I du théorème précédent et le théorème VIII, on sait que $r_1 = r = \frac{I_{gl'}}{V_0}$ et $R_1 = R = \frac{I_{gm'}}{V_0}$; on a donc

$$\frac{a^2}{b^2} = \frac{R}{r} = \frac{I_{gm'}}{I_{gl'}} = \frac{A^2}{B^2}. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Corollaire I. — Au lieu de l'indicatrice, on pourra, pour plus de commodité, tracer, avec C comme centre, dans le plan tangent en C à la surface (C), l'ellipse d'inertie de la flottaison FL, dont la conception et la représentation sont immédiates.

THÉORÈME XII. — *La section normale en* C *à la surface* (C), *qui passe par le centre de carène* C′, *infiniment voisin de* C, *situé dans le plan de l'indicatrice et obtenu par inclinaison autour d'un certain axe* gy, *a pour trace sur l'indicatrice une direction conjuguée de celle de l'axe d'inclinaison* gy (*fig.* 148).

En effet, C′A′ est une droite tangente à la surface (C) en C′; de plus, elle est horizontale, c'est-à-dire située dans le plan de l'indicatrice; donc c'est la tangente à l'indicatrice en C′. Donc sa

Fig. 148.

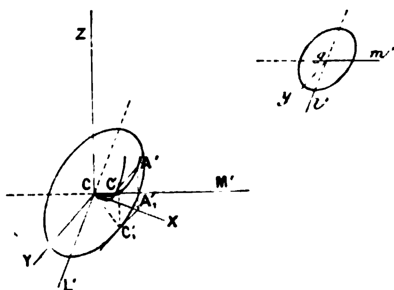
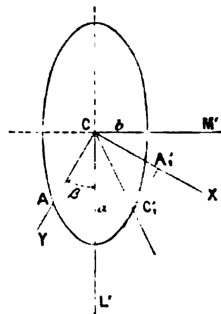


Fig. 149.



projection horizontale $C'_1A'_1$ est tangente à la projection horizontale de l'indicatrice sur le plan tangent. Le diamètre CC'_1 sur cette projection est, par suite, conjugué de la direction $C'_1A'_1$, ou encore de la direction CY, ou encore de la direction gy de l'axe d'inclinaison. C. Q. F. D.

La tangente $C'_1 A'_1$, et la tangente parallèle symétrique à la projection de l'indicatrice représentent d'ailleurs la projection de l'indicatrice du cylindre qui projette la surface (C) sur le plan d'inclinaison CX.

THÉORÈME XIII. — *Le rayon de courbure* ρ, *au point* C, *d'une section droite d'un cylindre quelconque projetant la surface* (C) *parallèlement à un axe d'inclinaison gy s'exprime, en fonction des rayons de courbure principaux* R_1 *et* r_1 *de la surface* (C) *en* C *et de l'angle* β *que fait l'axe gy avec le grand axe de l'ellipse d'inertie, par la relation*

$$\rho = R_1 \sin^2\beta - r_1 \cos^2\beta.$$

Soient, en effet, CY la parallèle, dans le plan de l'indicatrice, à l'axe *gy* (*fig.* 149), et β l'angle de CY avec le grand axe CL' de l'indicatrice. CY est conjuguée, dans l'indicatrice, de la direction CC'_1. Or le théorème d'Apollonius établit que le parallélogramme construit sur deux diamètres conjugués a une surface constante; on a donc, en appelant a le grand axe et b le petit axe de l'ellipse,

$$\overline{CA}.\overline{CA'_1} = a.b$$

ou

$$\overline{CA}^2.\overline{CA'_1}^2 = a^2 b^2$$

ou

$$\frac{\overline{CA'_1}^2}{a^2 b^2} = \frac{1}{\overline{CA}^2}.$$

Mais l'équation de l'ellipse en coordonnées polaires est

$$\frac{1}{\overline{CA}^2} = \frac{1}{a^2}\cos^2\beta + \frac{1}{b^2}\sin^2\beta;$$

d'où l'on déduit

$$\overline{CA'_1}^2 = b^2\cos^2\beta + a^2\sin^2\beta,$$

et, en remplaçant les carrés de CA'_1, a et b par leurs quantités proportionnelles ρ, R et r, puisque l'on a

$$2\rho\zeta = \overline{CA'_1}^2, \qquad 2R\zeta = a^2, \qquad 2r\zeta = b^2,$$

en raison du corollaire I du théorème XI, il vient, en définitive,

$$\rho = R \sin^2\beta + r \cos^2\beta$$

ou encore

$$\rho = R_1 \sin^2\beta + r_1 \cos^2\beta.$$

Cette élégante démonstration est due à M. Pinczon, ingénieur de la Marine.

Une démonstration plus simple est la suivante :

On sait que $I_{gy} = I_{gl'} \cos^2\beta + I_{gm'} \sin^2\beta$, le terme $P_{gl'm'}$ étant nul quand les axes gl' et gm' sont principaux d'inertie. Or on a

$$\rho = \frac{I_{gy}}{V_0}, \qquad r_1 = r = \frac{I_{gl'}}{V_0} \qquad \text{et} \qquad R_1 = R = \frac{I_{gm'}}{V_0};$$

donc

$$\rho = R_1 \sin^2\beta + r_1 \cos^2\beta. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

THÉORÈME XIV. — *Le rayon de courbure* ρ_1, *au point* C *d'une section normale quelconque en* C *à la surface* (C), *correspondant à un certain axe d'inclinaison* gy, *s'exprime, en fonction des rayons de courbure principaux* R_1 *et* r_1 *de la surface* (C) *en* C *et de l'angle* β *que fait l'axe* gy *avec le grand axe de l'ellipse d'inertie de la flottaison, par la relation*

$$\rho_1 = \frac{R_1^2 \sin^2\beta + r_1^2 \cos^2\beta}{R_1 \sin^2\beta + r_1 \cos^2\beta}.$$

De plus, les directions de la section normale et de l'axe gy *sont conjuguées dans l'ellipse d'inertie, et l'on a* (*fig.* 150)

$$\operatorname{tang}\omega = \frac{R_1}{r_1} \operatorname{tang}\beta.$$

En effet, à un axe d'inclinaison gy (*fig.* 150) correspond une section normale CC'_1, définie par η et ξ du centre de carène correspondant, c'est-à-dire faisant avec le plan d'inclinaison gx un angle φ, tel que $\operatorname{tang}\varphi = \frac{\eta}{\xi}$, et, avec le petit axe de l'ellipse d'inertie, un angle $\omega = \beta + \varphi$.

Nous savons, de plus, que le rayon de courbure ρ_1 a pour valeur (théorème IX)

$$\rho_1 = \rho + \frac{1}{\rho} \frac{P_{gxy}^2}{V_0^2}.$$

Or, d'après ce que nous avons vu au théorème VI, le moment-produit d'inertie P_{gxy} s'exprime, en fonction des coefficients d'inertie par rapport aux axes fixes d'inertie principaux, par

$$P_{gxy} = (-I_{gl'} + I_{gm'}) \sin\beta \cos\beta;$$

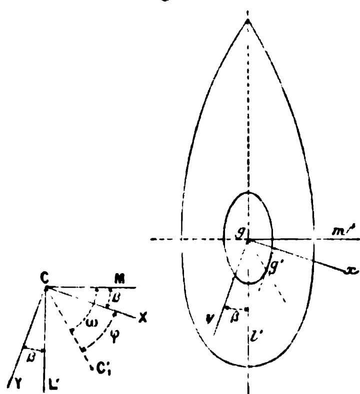
d'où

$$\frac{P_{gxy}^2}{V_0^2} = \left(-\frac{I_{gl'}}{V_0} + \frac{I_{gm'}}{V_0}\right)^2 \sin^2\beta \cos^2\beta = (R - r)^2 \sin^2\beta \cos^2\beta$$

ou

$$= (R_1 - r_1)^2 \sin^2\beta \cos^2\beta.$$

Fig. 150.



D'autre part, d'après le théorème précédent, nous avons

$$= \rho = R_1 \sin^2\beta + r_1 \cos^2\beta.$$

On arrivera donc, par substitution, à exprimer ρ_1 en fonction de R_1, r_1 et β

$$\rho_1 = R_1 \sin^2\beta + r_1 \cos^2\beta + \frac{(R_1 - r_1)^2 \sin^2\beta \cos^2\beta}{R_1 \sin^2\beta + r_1 \cos^2\beta}$$

$$= \frac{(R_1^2 - r_1^2) \sin^2\beta + r_1^2}{(R_1 - r_1) \sin^2\beta + r_1}$$

ou encore

$$\rho_1 = \frac{R_1^2 \sin^2\beta + r_1^2 \cos^2\beta}{R_1 \sin^2\beta + r_1 \cos^2\beta}.$$

En exprimant l'angle φ, puis l'angle ω en fonction de β, on trouve les relations

$$\operatorname{tang}\varphi = \frac{(R_1 - r_1) \sin\beta \cos\beta}{R_1 \sin^2\beta + r_1 \cos^2\beta}$$

et

$$\operatorname{tang}\omega = \frac{R_1}{r_1}\operatorname{tang}\beta.$$

Cette dernière montre (ce que nous savions déjà) que les directions CY et CC'_1 sont conjuguées dans l'ellipse qui a pour axes $a = \sqrt{R_1}$ et $b = \sqrt{r_1}$.

Réciproquement, *si, sur une direction quelconque* CC'_1, *faisant l'angle* ω *avec l'axe d'inertie maxima de la flottaison, on porte la racine carrée du rayon* ρ_1, *calculé comme ci-dessus, et en prenant pour* β *l'angle donné par la relation* $\operatorname{tang}\omega = \frac{R_1}{r_1}\operatorname{tang}\beta$, *le lieu du point obtenu* C'_1 *sera une ellipse semblable à l'indicatrice de la surface* (C) *en* C.

Théorème XV. — *Si, sur la direction d'un axe d'inclinaison quelconque* CY, *défini par l'angle* β *qu'il fait avec le grand axe de l'ellipse d'inertie de la flottaison* FL, *on porte une longueur* $\frac{1}{\sqrt{\rho}}$, ρ *étant calculé par la formule*

$$\rho = R_1 \sin^2\beta + r_1 \cos^2\beta,$$

on obtient un point M *dont le lieu géométrique est une ellipse semblable à l'indicatrice de la surface* (C) *en* C, *et semblablement orientée.*

En effet, soit CM'L' (*fig.* 151) l'ellipse indicatrice en C rapportée à ses axes CM' et CL'. Traçons l'axe d'inclinaison CY, faisant l'angle β avec CL'. La valeur calculée de ρ est proportionnelle au carré de $\overline{CA'_1}$; $\sqrt{\rho}$ est donc proportionnel à $\overline{CA'_1}$ et $\frac{1}{\sqrt{\rho}}$ à $\frac{1}{\overline{CA'_1}}$.

Portons cette longueur $\frac{1}{CA'_1}$ sur CY ; nous obtiendrons un point m, dont les coordonnées polaires, par rapport au point C et à la direction CL', sont l'angle β et le rayon vecteur

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{R_1 \sin^2\beta + r_1 \cos^2\beta}}.$$

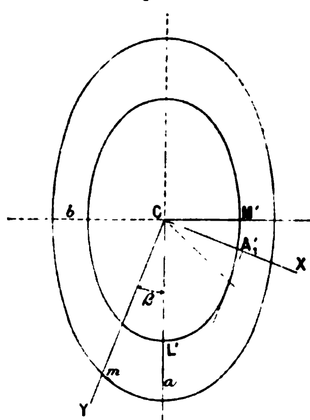
L'équation

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{R_1 \sin^2\beta + r_1 \cos^2\beta}}$$

est celle du lieu du point M. On peut l'écrire encore

$$\frac{1}{\lambda^2} = \frac{\cos^2\beta}{\frac{1}{r_1}} + \frac{\sin^2\beta}{\frac{1}{R_1}}.$$

Fig. 151.



Sous cette dernière forme, on reconnaît que le lieu du point M est une ellipse dont le grand axe a est donné par $a^2 = \frac{1}{r_1}$, et le petit axe b par $b^2 = \frac{1}{R_1}$.

L'ellipse M et l'indicatrice sont donc semblables, puisque $\frac{a^2}{b^2} = \frac{R_1}{r_1}$.

Les deux ellipses sont, de plus, semblablement orientées, puisque le grand axe $\frac{1}{r_1}$ s'obtient en faisant $\beta = 0$.

80. Problèmes relatifs à la surface (C).

PROBLÈME I. — *Trouver l'équation du paraboloïde du second degré osculateur en* C *à la surface* (C).

Prenons pour axes CZ, normale en C à la surface (C), CM', CL', parallèles aux axes d'inertie principaux de la flottaison FL' (CM', axe des abscisses x; CL', des ordonnées y). Un paraboloïde

ayant son axe parallèle à CZ aura pour équation

$$z = z_0 + \left(\frac{dz}{dx}\right)_0 x + \left(\frac{dz}{dy}\right)_0 y + \left(\frac{d^2 z}{dx^2}\right)_0 \frac{x^2}{2} + \left(\frac{d^2 z}{dx\,dy}\right)_0 \frac{2xy}{2} + \left(\frac{d^2 z}{dy^2}\right)_0 \frac{y^2}{2} + \left(\frac{d^3 z}{dx^3}\right)_0 \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

Pour le paraboloïde du second degré, le développement s'arrêtera après les termes du second degré, et le problème consistera à trouver les valeurs des constantes z_0, $\left(\frac{dz}{dx}\right)_0$, ...

Or le paraboloïde passe en C; donc $z_0 = 0$. Il est tangent en C à la surface et à son plan tangent; donc $\left(\frac{dz}{dx}\right)_0 = 0$ et $\left(\frac{dz}{dy}\right)_0 = 0$. Il est osculateur en C à la surface; il a donc même indicatrice, et toutes les sections perpendiculaires à CZ sont des ellipses ayant leurs axes dans les plans de projection; dès lors, $\left(\frac{d^2 z}{dx\,dy}\right)_0$, coefficient du terme en xy, est nul.

Reste à déterminer les coefficients des termes en x^2 et en y^2. Pour cela, nous remarquerons que le paraboloïde, étant osculateur en C à la surface, a mêmes rayons de courbure en C que la surface. Nous allons donc exprimer les coefficients cherchés en fonction des rayons de courbure principaux en C, R_1 et r_1, de la surface (C).

On a

$$r_1 = \frac{\left[1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)_0^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\left(\frac{d^2 z}{dx^2}\right)_0} = \frac{1}{\left(\frac{d^2 z}{dx^2}\right)_0}; \qquad \text{d'où} \qquad \left(\frac{d^2 z}{dx^2}\right)_0 = \frac{1}{r_1}$$

et

$$R_1 = \frac{\left[1 + \left(\frac{dz}{dy}\right)_0^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\left(\frac{d^2 z}{dy^2}\right)_0} = \frac{1}{\left(\frac{d^2 z}{dy^2}\right)_0}; \qquad \text{d'où} \qquad \left(\frac{d^2 z}{dy^2}\right)_0 = \frac{1}{R_1}.$$

L'équation du paraboloïde cherché est, par suite,

$$z = \frac{x^2}{2 r_1} + \frac{y^2}{2 R_1}.$$

Problème II. — *Trouver la trajectoire du centre de carène pour une direction constante de l'axe d'inclinaison.*

Reprenons les équations fondamentales des coordonnées du centre de carène par rapport au plan d'inclinaison :

$$\zeta = \frac{d\theta^2}{2}\frac{I_{gy}}{V_0},$$

$$\xi = d\theta\,\frac{I_{gy}}{V_0},$$

$$\eta = d\theta\,\frac{P_{gxy}}{V_0}.$$

L'axe d'inclinaison ayant ici une direction constante, les quantités I_{gy}, P_{gxy} sont des coefficients constants, et l'on aura le premier élément de la trajectoire du centre de carène en éliminant l'infiniment petit $d\theta$; il vient

$$\left\{\begin{aligned} \eta &= \frac{P_{gxy}}{I_{gy}}\,\xi, \\ \zeta &= \frac{1}{2}\frac{V_0}{I_{gy}}\,\xi^2. \end{aligned}\right.$$

C'est l'équation d'une parabole plane, tangente en C au plan des XY et située dans un plan normal faisant avec le plan d'inclinaison l'angle φ donné par $\tang\varphi = \frac{\eta}{\xi} = \frac{P_{gxy}}{I_{gy}}$.

Le premier élément de cette parabole plane est d'ailleurs la ligne de contour apparent de la surface (C) avec le cylindre qui la projette orthogonalement sur le plan d'inclinaison constant.

Cherchons maintenant le prolongement de la courbe, quand l'angle $d\theta$ ne reste plus infiniment petit. Pour un angle θ fini, la flottaison nouvelle, F'L', et la flottaison primitive, FL, se couperont suivant une droite $g'y'$ parallèle à gy, et, dans la flottaison nouvelle, par son centre de gravité g', nous mènerons une droite $g'x'$ perpendiculaire à $g'y'$.

En prenant les moments des onglets découpés par les deux flottaisons, nous aurons

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} V_0\zeta &= \int_0^\Theta I_{g'y'}\sin\theta\,d\theta, \\ V_0\eta &= \int_0^\Theta P_{g'x'y'}\,d\theta, \\ V_0\xi &= \int_0^\Theta I_{g'y'}\cos\theta\,d\theta. \end{aligned}\right.$$

Ici $I_{g'y'}$ et $P_{g'x'y'}$ sont des fonctions de θ que nous devons supposer calculées au préalable et connues.

Dès lors, pour résoudre le problème, il suffira d'éliminer θ dans le système (1).

Supposons le problème résolu : nous aurons les deux équations de la trajectoire sous la forme

$$\text{(A)} \qquad \begin{cases} \eta = f(\xi), \\ \zeta = F(\xi). \end{cases}$$

Mais nous pouvons remarquer que l'on a, dans le système (A),

$$\frac{d\eta}{d\theta} = \frac{d\eta}{d\xi}\frac{d\xi}{d\theta} \quad \text{et} \quad \frac{d\zeta}{d\theta} = \frac{d\zeta}{d\xi}\frac{d\xi}{d\theta}$$

ou encore

$$\text{(B)} \qquad \frac{d\eta}{d\xi} = \frac{\dfrac{d\eta}{d\theta}}{\dfrac{d\xi}{d\theta}} \quad \text{et} \quad \frac{d\zeta}{d\xi} = \frac{\dfrac{d\zeta}{d\theta}}{\dfrac{d\xi}{d\theta}}.$$

En différentiant les relations (B) et en y faisant ensuite $\theta = 0$, on obtiendra les coefficients des développements des équations (A) en fonction des coefficients des développements des équations (1); la question est ainsi ramenée à chercher ceux-ci. Or nous avons

$$\text{(1')} \qquad \begin{cases} V_0\, d\zeta = I_{gy'} \sin\theta\, d\theta, \\ V_0\, d\eta = P_{gxy'}\, d\theta, \\ V_0\, d\xi = I_{gy'} \cos\theta\, d\theta \end{cases}$$

et, en différentiant successivement,

$$\text{(2)} \qquad \begin{cases} V_0\, d^2\zeta = dI \sin\theta\, d\theta + I \cos\theta\, d\theta^2, \\ V_0\, d^2\eta = dP\, d\theta, \\ V_0\, d^2\xi = dI \cos\theta\, d\theta - I \sin\theta\, d\theta^2, \end{cases}$$

et ainsi de suite.

En faisant $\theta = 0$, les quantités $I_{gy'}$, $P_{gx'y'}$, $dI_{gy'}$, $dP_{gx'y'}$, ... deviendront I_{gy}, P_{gxy}, dI_{gy}, dP_{gxy}, ..., et l'on aura

$$\begin{cases} V_0\left(\dfrac{d\zeta}{d\theta}\right)_0 = 0, \\ V_0\left(\dfrac{d\eta}{d\theta}\right)_0 = P_{gxy}, \\ V_0\left(\dfrac{d\xi}{d\theta}\right)_0 = I_{gy}; \end{cases} \quad \begin{cases} V_0\left(\dfrac{d^2\zeta}{d\theta^2}\right)_0 = I_{gy}, \\ V_0\left(\dfrac{d\eta^2}{d\theta^2}\right)_0 = \dfrac{dP_{gxy}}{d\theta}, \\ V_0\left(\dfrac{d^2\xi}{d\theta^2}\right)_0 = \dfrac{dI_{gy}}{d\theta}; \end{cases} \quad \begin{cases} V_0\left(\dfrac{d^3\zeta}{d\theta^3}\right)_0 = 2\,\dfrac{dI_{gy}}{d\theta}, \\ V_0\left(\dfrac{d^3\eta}{d\theta^3}\right)_0 = \dfrac{d^2P_{gxy}}{d\theta^2}, \\ V_0\left(\dfrac{d^3\xi}{d\theta^3}\right)_0 = \dfrac{d^2I_{gy}}{d\theta^2} - I_{gy}. \end{cases}$$

Portant ces valeurs dans les relations déduites du système (B), on obtiendra finalement

$$\left(\frac{d\eta}{d\xi}\right)_0 = \frac{P_{gxy}}{I_{gy}} \quad \text{et} \quad \left(\frac{d\zeta}{d\xi}\right)_0 = 0,$$

$$\left(\frac{d^2\eta}{d\xi^2}\right)_0 = \frac{\left(I_{gy}\dfrac{dP_{gxy}}{d\theta} - P_{gxy}\dfrac{dI_{gy}}{d\theta}\right)V_0}{I_{gy}^3} \quad \text{et} \quad \left(\frac{d^2\zeta}{d\xi^2}\right)_0 = \frac{V_0}{I_{gy}},$$

et ainsi de suite.

D'où les équations de la trajectoire

$$\left\{\begin{aligned} \eta &= \frac{\xi}{1}\frac{P_{gxy}}{I_{gy}} + \frac{\xi^2}{2!}\frac{\left(I_{gy}\dfrac{d}{d\theta}P_{gxy} - P_{gxy}\dfrac{dI_{gy}}{d\theta}\right)V_0}{I_{gy}^3} + \ldots, \\ \zeta &= \frac{\xi^2}{2!}\frac{V_0}{I_{gy}} + \ldots, \end{aligned}\right.$$

qui s'obtiennent au moyen de la connaissance des courbes $I_{gy'} = \varphi(\theta)$, $P_{g'x'y'} = \psi(\theta)$, ou plutôt par la connaissance des ordonnées et des dérivées initiales de ces courbes, au point $\theta = 0$.

La deuxième équation $\zeta = F(\xi)$ n'est d'ailleurs autre chose que la projection de la trajectoire sur le plan d'inclinaison constant, c'est-à-dire la courbe des centres des carènes isocarènes que l'on considère d'habitude, développée en fonction de l'abscisse avec des coefficients uniquement fonctions des facteurs d'inertie de la flottaison droite initiale et de leurs dérivées à l'origine par rapport à θ. En calculant ces dérivées au moyen de flottaisons droites voisines de la flottaison initiale, on réaliserait une méthode de calcul des carènes inclinées, analogue de tous points à la méthode Guyou et Simart, mais où le but des recherches serait la courbe des centres de carènes en coordonnées rectangulaires, au lieu d'être cette même courbe en coordonnées de courbure ou longueurs d'arc, ce qui pourrait être un avantage pour le tracé de la courbe en question. Disons toutefois que l'on retomberait identiquement sur les mêmes calculs et les mêmes formules, pour le bras de levier isocarène $\varphi_{0,n}$ qui, lui, doit être calculé en fonction de θ et non de ξ.

Pour traiter le problème II, on pourrait suivre une autre marche basée sur la propriété suivante :

La corde C_0C_1 (*fig.* 152) *de la trajectoire du centre de ca-*

rène, pour l'arc correspondant à une inclinaison finie θ *autour d'un certain axe d'inclinaison, est parallèle à la ligne ie de l'espace, qui joint les centres de gravité des onglets d'angle* θ *immergé et émergé.*

Considérons, en effet, le centre de volume D de la portion commune F_0OOL_1 des deux carènes égales F_0L_0 et F_1L_1. Le point C_0 se trouve sur la droite de l'espace eD, à une distance $\overline{C_0D}$ du point D donnée par

$$\frac{C_0D}{eD} = \frac{u}{V_0},$$

en désignant par V_0 le volume de l'isocarène et par u celui d'un quelconque des onglets.

Fig. 152.

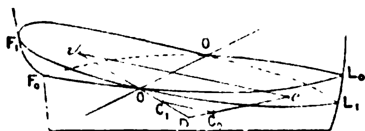
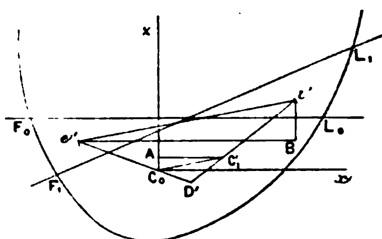


Fig. 153.



De même, le point C_1 se trouve sur la droite de l'espace iD, à une distance $\overline{C_1D}$ du point D donnée par

$$\frac{C_1D}{iD} = \frac{u}{V_0}.$$

Les triangles de l'espace DC_0C_1 et Dei sont donc dans un même plan et directement homothétiques par rapport au point D.

C.Q.F.D.

La propriété que nous venons de démontrer subsistant en projection, on aura l'équation $\zeta = F(\xi)$ de la courbe (C), projection de la trajectoire du centre de carène sur le plan d'inclinaison constant, en écrivant que le triangle $C_0C'_1A$ (*fig.* 153) est rectangle, ce qui conduit à

$$\overline{C_0A}^2 = \overline{C_0C'_1}^2 - \overline{AC'_1}^2,$$

c'est-à-dire à

$$\zeta^2 = \overline{C_0C'_1}^2 - \xi^2 \qquad \text{ou} \qquad \zeta^2 = \overline{e'i'}^2\frac{u^2}{V_0^2} - \xi^2$$

ou encore

$$\zeta = \frac{\overline{i'B}}{\overline{e'B}}\,\xi.$$

En exprimant $\overline{e'i'}$, ou $\overline{i'B}$ et $\overline{e'B}$, au moyen des formules des onglets, on retomberait sur les relations que nous avons trouvées.

Problème III. — *Trouver la trajectoire du centre de carène pour un angle d'inclinaison* θ *constant et un axe d'inclinaison* gy *de direction variable.*

Ici nous prendrons pour axes fixes CZ, normale en C à la surface (C); CM′ et CL′ axes de l'ellipse indicatrice en C. De plus, nous ne traiterons la question que pour un angle θ infiniment petit.

Nous avons vu (théorème VI, corollaire II) que les coordonnées du centre de carène C′ par rapport aux axes fixes choisis sont

$$\zeta = \frac{\theta^2}{2V_0}[I_{gl'}\cos^2\beta' + I_{gm'}\sin^2\beta'],$$

$$\eta'_1 = \frac{\theta}{V_0}\,I_{gm'}\sin\beta',$$

$$\xi'_1 = \frac{\theta}{V_0}\,I_{gl'}\cos\beta',$$

en désignant par β' l'angle de l'axe d'inclinaison variable gy avec le grand axe de l'ellipse d'inertie de la flottaison primitive (*fig.* 154).

Nous pouvons donc écrire

$$\zeta = \frac{\theta^2}{2}(r_1\cos^2\beta' + R_1\sin^2\beta'),$$

$$\eta'_1 = \theta R_1 \sin\beta',$$

$$\xi'_1 = \theta r_1 \cos\beta'.$$

En éliminant la variable β', nous aurons les équations du lieu cherché. On obtient

$$\frac{\xi_1'^2}{\theta^2 r_1^2} + \frac{\eta_1'^2}{\theta^2 R_1^2} = 1 \qquad \text{et} \qquad 2\zeta = \theta^2 R_1 - \frac{R_1 - r_1}{r_1^2}\,\xi_1'^2.$$

La première équation indique que la projection du lieu sur le plan horizontal est une ellipse $mqnp$ (*fig.* 155), infiniment petite, de même orientation que l'indicatrice, et semblable à celle-ci, comme ayant pour axes des longueurs θR_1 et θr_1.

La deuxième équation montre que la projection de la courbe sur le plan ZCn est une parabole à axe vertical dont le sommet S est à la hauteur $\zeta_0 = \frac{1}{2}\theta^2 R_1$ et dont les branches vont en descendant.

Fig. 154.

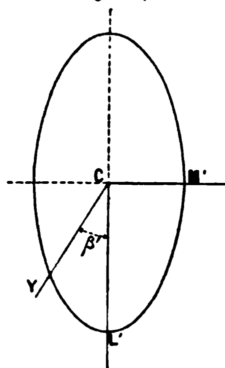
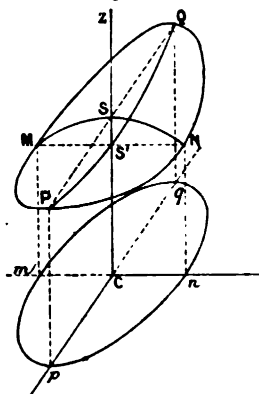


Fig. 155.



La troisième projection du lieu sur ZCp s'obtient en éliminant ξ'_1 entre les deux équations; c'est

$$2\zeta = \theta^2 r_1 + \frac{R_1 - r_1}{R_1^2} \eta_1'^2,$$

équation d'une seconde parabole ayant son sommet en S' au-dessous de S et des branches ascendantes.

On peut alors tracer facilement la courbe gauche MQNP en perspective.

La question peut être autrement traitée au moyen des coordonnées variables ξ, η, ζ, exprimées au moyen non plus des coefficients variables I_{gy}, P_{gxy}, mais des coefficients constants $I_{gl'}$, $I_{gm'}$, et de l'angle β'.

Soient

$$\zeta = \frac{\theta^2}{2V_0} I_{gy} = \frac{\theta}{2}\xi,$$

$$\xi = \frac{\theta}{V_0} I_{gy},$$

$$\eta = \frac{\theta}{V_0} P_{gxy}.$$

Nous savons que

$$I_{gy} = I_{gl'} \cos^2\beta' + I_{gm'} \sin^2\beta'$$

et que

$$P_{gxy} = (-I_{gl'} + I_{gm'}) \sin\beta' \cos\beta'.$$

Nous écrirons donc

$$\xi = \theta\,(r_1 \cos^2\beta' + R_1 \sin^2\beta'),$$
$$\eta = \theta\,(R_1 - r_1) \sin\beta' \cos\beta'.$$

Construisons maintenant la courbe des η en coordonnées polaires par rapport au point g et à la direction fixe gl'. Pour cela, nous porterons la valeur de η correspondant à un angle β' sur le vecteur gy. La courbe est une rose à quatre feuilles (*fig.* 156).

Fig. 156.

Nous construirons ensuite une autre courbe, celle des ξ en coordonnées polaires par rapport au point O et à la direction fixe gm', en portant le ξ d'un angle quelconque β' sur la perpendiculaire gx à l'axe correspondant gy. Pour un angle β' quelconque, le point C'_1 se trouvera dès lors au sommet du parallélogramme construit sur $gA = \eta$ et $gB = \xi$.

Nous remarquerons, en passant, que

$$\eta = \frac{1}{2}\frac{d\xi}{d\beta'} = \frac{1}{\theta}\frac{d\zeta}{d\beta'}.$$

On peut encore opérer d'une troisième manière pour résoudre le problème.

Une fois construite la courbe polaire à quatre feuilles de la coordonnée η, on peut porter le ξ en ordonnée verticale au-dessus du point A. Remarquons que la relation

$$\xi = \theta\,(r_1 \cos^2\beta' + R_1 \sin^2\beta')$$

peut se mette sous les formes ci-après :

$$\frac{\xi}{\theta} = R_1 - (R_1 - r_1)\cos^2\beta' \qquad \text{ou} \qquad \left(R_1 - \frac{\xi}{\theta}\right) = (R_1 - r_1)\cos^2\beta',$$

ou

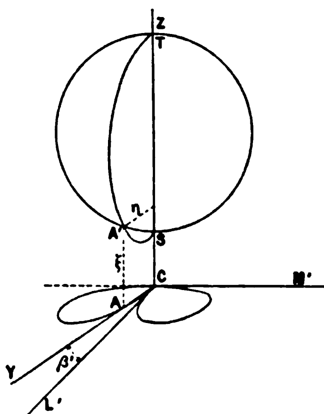
$$\frac{\xi}{\theta} = r_1 - (R_1 - r_1)\sin^2\beta' \qquad \text{ou} \qquad \left(\frac{\xi}{\theta} - r_1\right) = (R_1 - r_1)\sin^2\beta',$$

et, en multipliant,

$$(\theta R_1 - \xi)(\xi - \theta r_1) = \theta^2 (R_1 - r_1)^2 \sin^2\beta' \cos^2\beta' = \eta_1^2.$$

Cette relation montre que le point A′, construit comme nous l'avons fait, se trouve sur la sphère de diamètre ST, le point S

Fig. 157.



s'obtenant en portant sur CZ la longueur θr_1, et le point T en portant sur CZ la longueur θR_1. Le lieu des points A′ est donc l'intersection de la sphère ST par un cylindre ayant pour base la rose à quatre feuilles (*fig.* 157).

Or la courbe A′ ainsi définie permet de résoudre aisément le problème; car tout point A′ de cette courbe fournit : 1° l'angle β', par l'orientation de son plan vecteur; 2° le η_1 de la projection horizontale C'_1 par son rayon vecteur; 3° le ξ du point C'_1 par son ordonnée; enfin 4° le ζ du point C′ de l'espace au moyen du ξ.

81. Définitions relatives à la surface (C).

On appelle *métacentre,* relatif à une isocarène V_0, limitée par la flottaison FL, et à un axe d'inclinaison de direction CY (*fig.* 158),

Fig. 158.

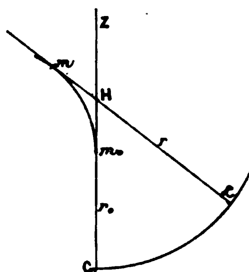
le pied, sur la normale à la surface (C) au point C correspondant à la flottaison FL, de la plus courte distance de cette normale et de la normale au centre de carène C' infiniment voisin. Ainsi le métacentre de l'isocarène FL est le point m, pied sur CZ de la plus courte distance Mm de CZ et de C'M, normale en C' à la surface (C).

De même, si l'axe d'inclinaison garde une direction constante, le métacentre de l'isocarène F'L', dont le centre est C', sera le point m'_1 de l'espace, pied sur C'M de la plus courte distance de C'M et de C''M_1, normale en C'' à la surface (C). En continuant, on verrait que la courbe de l'espace mm'_1..., lieu des métacentres isocarènes pour un axe d'inclinaison constant, a pour projection sur le plan d'inclinaison une courbe mm_1... qui est la développée de la projection CAB... sur ce même plan de la courbe CC'C''... des centres de carène de l'espace.

En général, on considère une carène initialement droite et s'inclinant autour d'un axe d'inclinaison constant, dirigé suivant le grand axe ou suivant le petit axe de la flottaison. On a donc à considérer les courbes-projections dont nous venons de parler : 1° sur le plan transversal pour les inclinaisons transversales;

2° sur le plan longitudinal, pour les inclinaisons longitudinales. Dans le premier cas, la développée part d'un point m_0 (*fig.* 159) de la verticale C_0Z qu'on appelle *premier métacentre transversal* ou *point métacentrique transversal,* et l'on donne à la lon-

Fig. 159.



gueur $m_0C_0 = r_0$ le nom de *rayon métacentrique initial transversal.* On appelle *hauteur métacentrique transversale* pour une inclinaison θ la distance C_0H, comptée sur la normale initiale, du point C_0 au point d'intersection H des projections des deux normales extrêmes C_0Z et Cm. M. Reed, en Angleterre, a proposé, pour les points H, le nom de *faux métacentres,* par opposition au nom de *métacentres* réservé aux points *m.*



CHAPITRE XV.

GÉOMÉTRIE DE LA SURFACE (F) DES ISOCARÈNES DE VOLUME V_0.

82. Étude de la surface (F) et de sa courbure autour d'un point.

THÉORÈME I. — *Le centre de gravité d'une flottaison détachant un volume* V_0 *est le point de tangence de cette flottaison avec la surface* (F), *enveloppe des flottaisons qui détachent des isocarènes de volume* V_0.

En effet, soit g le centre de gravité d'une flottaison. Une flottaison isocarène infiniment voisine quelconque coupe la première suivant une droite passant par g. Ce point, commun à la flottaison primitive et à une flottaison quelconque infiniment voisine, est donc un point de l'enveloppe (F), c'est le point de contact de la flottaison primitive et de la surface (F).

On pourrait dire encore : Soit la surface (F), la flottaison primitive est un de ses plans tangents; les intersections de ce plan avec les flottaisons isocarènes infiniment voisines forment un faisceau de droites rayonnantes issues de g dans le plan tangent; donc le point g est celui où toutes ces droites du plan tangent et le plan tangent lui-même touchent la surface (F).

Corollaire I. — La surface (F) est le lieu géométrique des centres de gravité des flottaisons isocarènes.

Corollaire II. — La surface (F) est continue, fermée et contenue tout entière dans l'intérieur du flotteur.

Corollaire III. — Le mouvement *géométrique* d'un flotteur, qui donnerait toutes les isocarènes V_0 possibles, serait réalisé par le roulement de la surface (F) des isocarènes de ce volume sur le plan du niveau du liquide.

Corollaire IV. — Les plans tangents des surfaces (C) et (F) aux points correspondants sont parallèles.

THÉORÈME II. — *Pour un axe d'inclinaison gy quelconque, les coordonnées du centre de gravité g' de la flottaison isocarène infiniment voisine, par rapport au plan d'inclinaison et à gy, sont, en appelant* S *la surface de la flottaison* FL,

$$\zeta' = \frac{\xi' d\theta}{2} = \frac{d\theta}{2S} dM_{gy}(S),$$

$$\xi' = \frac{1}{S} dM_{gy}(S),$$

$$\eta' = \frac{1}{S} dM_{gx}(S).$$

Soient, en effet (*fig.* 160), gz la perpendiculaire en g à la première flottaison FL; gy la direction dans cette flottaison de l'axe

Fig. 160.

d'inclinaison, et gx la trace sur cette flottaison du plan d'inclinaison.

On a tout d'abord dans le triangle $g'_1 mn$

$$\zeta' = \frac{\xi'}{2} d\theta.$$

Pour avoir les coordonnées ξ' et η' du point g', nous prendrons les moments de la nouvelle surface de flottaison par rapport à zgy et à zgx.

Puisque $d\theta$ est infiniment petit, le rabattement de F′L′ sur FL s'obtiendra en projetant F′L′ sur FL en $f'l'$ et l'on aura

$$\text{aire F'L'} = \text{aire FL} + \text{bande L}l' + \text{bande F}f'.$$

Prenons maintenant les moments par rapport à gy et appelons i' les ordonnées de F′L′, i celles de FL, du côté de l'immersion, e' et e les ordonnées correspondantes du côté de l'émersion, ces ordonnées étant mesurées à partir du plan vertical ygz; on devra écrire

$$\begin{aligned} S'\xi' &= S \times 0 + \int_{N}^{R} (i' - i)\left(\frac{i'+i}{2}\right) dx - \int_{N}^{R} (e' - e)\left(\frac{e'+e}{2}\right) dx \\ &= \frac{1}{2}\int_{N}^{R} (i'^2 - e'^2)\, dx - \frac{1}{2}\int_{N}^{R} (i^2 - e^2)\, dx \\ &= M_{\gamma\eta}(S') - M_{gy}(S). \end{aligned}$$

Mais, au lieu de $M_{\gamma\eta}(S')$, moment par rapport à l'axe projeté en γ, on peut employer $M_{g'y'}(S')$, moment par rapport à l'axe projeté en g'; car

$$M_{\gamma\eta}(S') = \Sigma\, d\omega' i' \qquad \text{et} \qquad M_{g'y'}(S') = \Sigma\, d\omega'(i' - \xi'),$$

et, dans le facteur élémentaire $i' - \xi'$, on peut négliger l'infiniment petit ξ' devant la quantité finie i'. De même, dans le second membre, on remplacera le facteur $S' = S + dS$ par S, et il viendra enfin

$$\xi' = \frac{1}{S}[M_{g'y'}(S') - M_{gy}(S)] = \frac{1}{S} dM_{gy}(S).$$

Pour avoir η', nous prendrons les moments de F′L′ rabattu par rapport à gx, et nous obtiendrons, en appelant λ, λ' les ordonnées des éléments d'aires des bandes Ll' et f'F en avant et en arrière

de gx,

$$\begin{aligned} S\eta' = & \int_0^N (i'-i)\,dx\lambda + \int_0^N (e'-e)\,dx\lambda \\ & - \int_0^R (i'-i)\,dx\lambda' - \int_0^R (e'-e)\,dx\lambda' \\ & = \left[\int_0^N (i'+e')\,dx\lambda - \int_0^R (i'+e')\,dx\lambda'\right] \\ & - \left[\int_0^N (i+e)\,dx\lambda - \int_0^R (i+e)\,dx\lambda'\right] \\ & = M_{gx}(S') - M_{gx}(S), \end{aligned}$$

ce qu'on peut écrire, en remarquant que $M_{gx}(S')$ est égal, à un infiniment petit près, à $M_{g'x'}(S')$,

$$S\eta' = dM_{gx}(S);$$

d'où enfin

$$\eta' = \frac{1}{S}\,dM_{gx}(S).$$

Théorème III. — *Le rayon de courbure en g de la section droite du cylindre projetant la surface* (F) *sur un plan d'inclinaison constant est égal à*

$$\iota = \frac{1}{S}\frac{d}{d\theta}M_{gy}(S).$$

On voit, en effet, sur la *fig.* 160, que l'angle $d\theta$ de la flottaison FL ou ygx avec une flottaison infiniment voisine, lmp, est donné sur le plan normal d'inclinaison et que $\widehat{pmx} = d\theta$. Or la trace mp de la deuxième flottaison sur le plan d'inclinaison est la trace sur ce plan de projection du plan tangent au cylindre projetant, autrement dit est la tangente, à la section droite de ce cylindre, infiniment voisine de gx. Le point de contact g'_1 est la trace de la génératrice de contact $g'g'_1$ qui passe par le point de contact g' de la surface (F) et du plan tangent lmp. Les deux perpendiculaires gz à gx et g'_1K à mp, dans le plan d'inclinaison, font donc entre elles l'angle $d\theta$ et donnent par leur intersection en q le centre de courbure de la section droite gg'_1 au point g. On a, par suite, pour le rayon de courbure cherché,

$$\overline{gq} = \iota = \frac{\xi'}{d\theta} = \frac{1}{S}\frac{d}{d\theta}M_{gy}(S) \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

THÉORÈME IV OU THÉORÈME DE DUPIN. — *Le rayon de courbure en g de la section droite du cylindre projetant la surface* (F) *sur un plan d'inclinaison constant est égal à*

$$\iota = \frac{I_{gy}(\text{contour tang}\,\mu)}{S},$$

en désignant par I_{gy} (contour tang μ) *le moment d'inertie par rapport à l'axe gy du contour de la flottaison* FL *dont le centre de gravité est en g, en supposant que chaque élément de ce contour est chargé d'un poids proportionnel à la tangente de l'angle* μ *que fait la muraille avec la verticale, au-dessus de la flottaison, dans un plan normal au contour. L'angle* μ *est d'ailleurs compté positivement s'il est situé du côté de la verticale extérieur au flotteur, et négativement s'il est du côté intérieur.*

Ce théorème remarquable, qui donne au rayon de courbure du cylindre enveloppe de la surface (F) une expression de même forme que celle déjà trouvée pour le rayon de courbure du cylindre enveloppe de la surface (C), se démontre comme suit :

Soit la flottaison FL (*fig.* 161); marquons l'axe gy et le plan gx d'inclinaison. Considérons la flottaison F′L′ faisant l'angle $d\theta$ avec FL et projetons F′L′ sur le plan FL, en $f'l'$.

Les bandes Ll' et Ff' peuvent se décomposer en éléments, par des normales au contour FL, ayant pour aires $d\omega$ le produit de l'élément de contour, ds, par l'élément de normale, $d\nu$,

$$d\omega = ds\,d\nu;$$

$d\nu$ sera d'ailleurs compté positivement s'il est extérieur à FL et négativement s'il est intérieur à ce contour. Or faisons une coupe verticale suivant le plan normal au contour ab, et rabattons horizontalement : le point a est un point de la muraille dans le plan FL; le point b est la projection d'un point c de la muraille situé dans le plan F′L′, c'est-à-dire à une certaine hauteur dz au-dessus ou au-dessous de FL. Du côté de l'immersion, dz est au-dessus de FL et l'angle μ, qui doit être compté dans le plan ab au-dessus de FL, est l'angle de la verticale aV avec la muraille ac. On a donc ici

$$d\nu = dz\,\text{tang}\,\mu.$$

D'autre part, en appelant i l'ordonnée du point a du contour FL du côté de l'immersion,

$$dz = i\,d\theta,$$

d'où enfin

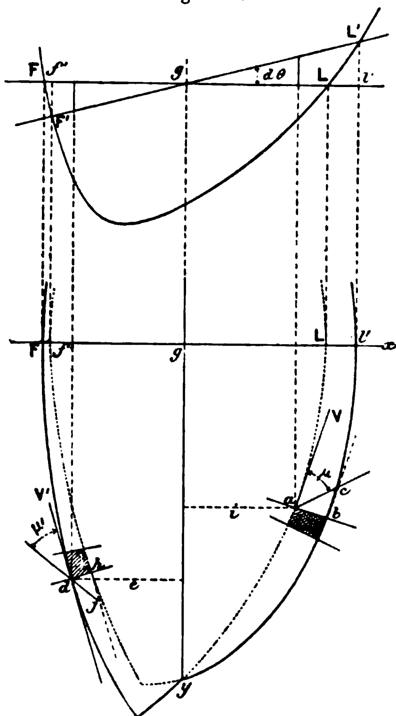
$$d\nu = i\,d\theta \operatorname{tang}\mu.$$

Du côté de l'émersion, en comptant e en valeur absolue, nous aurons

$$dz' = e\,d\theta$$

en valeur absolue. D'autre part, la muraille dj prolongée au-dessus de FL dans le plan normal dh fait avec la verticale l'angle po-

Fig. 161.



sitif μ' et dans ce cas le $d\nu$ est négatif, tandis que si μ' était négatif, $d\nu$ serait positif; nous aurons donc, en laissant à $\operatorname{tang}\mu'$ son signe,

$$d\nu = -\,e\,d\theta \operatorname{tang}\mu'.$$

Prenons maintenant les moments des aires par rapport à l'axe

gy : nous aurons

$$S'\xi' = \int_{\mathcal{N}}^{\mathcal{R}} ds . i^2\, d\theta \operatorname{tang}\mu + \int_{\mathcal{N}}^{\mathcal{R}} ds' e^2\, d\theta \operatorname{tang}\mu'$$

$$= d\theta \left(\int_{\mathcal{N}}^{\mathcal{R}} ds . i^2 \operatorname{tang}\mu + \int_{\mathcal{N}}^{\mathcal{R}} ds' e^2 \operatorname{tang}\mu \right)$$

ou

$$S\xi' = d\theta\, I_{gy}(\text{contour tang}\,\mu);$$

d'où

$$\iota = \frac{\xi'}{d\theta} = \frac{I_{gy}(\text{contour tang}\,\mu)}{S} \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Théorème V. — *Les coordonnées du point g' par rapport à l'axe et au plan d'inclinaison s'expriment en fonction des coefficients d'inertie du contour de la flottaison* FL, *chargé en chaque point proportionnellement à* tang μ, *par*

$$\xi' = \frac{d\theta\, I_{gy}(\text{contour tang}\,\mu)}{S},$$

$$\eta' = \frac{d\theta\, P_{gxy}(\text{contour tang}\,\mu)}{S},$$

$$\zeta' = \frac{d\theta^2}{2}\, \frac{I_{gy}(\text{contour tang}\,\mu)}{S}.$$

Pour ce qui est de ξ' et de ζ', leur expression, sous la forme ci-dessus, résulte de ce qui vient d'être dit au théorème précédent, quand on a pris les moments des aires par rapport à l'axe gy. Nous trouverons de même l'expression de η' en prenant les moments des mêmes aires par rapport à gx, comme ci-dessous, en désignant par λ et λ' les distances d'un point du contour FL en avant ou en arrière de l'axe des moments gx :

$$S'\eta' = \int_0^{\mathcal{N}} ds\, d\nu\, \lambda - \int_0^{\mathcal{R}} ds\, d\nu\, \lambda' + \int_0^{\mathcal{R}} ds\, d\nu'\lambda' - \int_0^{\mathcal{N}} ds\, d\nu' \lambda$$

$$= d\theta \left[\int_0^{\mathcal{N} \text{ ou } \mathcal{R}} ds \operatorname{tang}\mu (i\lambda - e\lambda - i\lambda' + e\lambda') \right]$$

ou

$$S\eta' = d\theta\, P_{gxy}(\text{contour tang}\,\mu),$$

d'où

$$\eta' = \frac{d\theta\, P_{gxy}(\text{contour tang}\,\mu)}{S}.$$

Théorème VI. — *Le rayon de courbure en g de la section*

droite du cylindre projetant la surface (F) *sur un plan d'inclinaison constant est égal à*

$$\iota = \frac{I_{gy}(\text{contour} \cos\alpha \tang\gamma)}{S},$$

en désignant par I_{gy} (contour $\cos\alpha \tang\gamma$) *le moment d'inertie par rapport à gy du contour de la flottaison* FL *dont chaque élément de longueur ds serait chargé d'un poids proportionnel au produit* $\cos\alpha \tang\gamma$. *L'angle* α *est l'angle de l'élément ds avec gy; l'angle* γ *est l'angle de la muraille avec la verticale, au-dessus de la flottaison* FL, *dans un plan, non plus normal au contour, mais parallèle au plan d'inclinaison.*

Soient, en effet (*fig.* 162), le contour FL et la projection $f'l'$. Prenons dans la bande Ff' l'élément d'aire

$$d\omega = ds\, d\nu,$$

comme tout à l'heure. Projetons l'élément $ds = \overline{ae}$ en $\overline{eh} = dl$ parallèlement à gy :

$$dl = ds \cos\alpha.$$

Prenons ensuite le plan ak parallèle au plan d'inclinaison gx et passant par a. Si nous coupons la muraille par les plans verti-

Fig. 162.

caux qui ont pour traces ab et ak et que nous rabattions horizontalement ces coupes, nous aurons sur l'une l'angle μ, et sur l'autre

l'angle γ de la muraille avec la verticale au-dessus de FL. Or

$$\operatorname{tang}\gamma = \frac{\overline{ak}}{dz}, \qquad \operatorname{tang}\mu = \frac{\overline{ab}}{dz};$$

donc

$$\operatorname{tang}\gamma = \operatorname{tang}\mu \frac{ak}{ab} = \frac{\operatorname{tang}\mu}{\cos\alpha}$$

ou

$$\operatorname{tang}\mu = \cos\alpha \operatorname{tang}\gamma \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

On déduirait de ce théorème les valeurs des coordonnées ξ', η', ζ' dans ce nouveau mode de représentation

$$\xi' = \frac{d\theta\, I_{gy}(\text{contour}\cos\alpha\operatorname{tang}\gamma)}{S},$$

$$\eta' = \frac{d\theta\, P_{gxy}(\text{contour}\cos\alpha\operatorname{tang}\gamma)}{S},$$

$$\zeta' = \frac{d\theta^2}{2}\,\frac{I_{gy}(\text{contour}\cos\alpha\operatorname{tang}\gamma)}{S}.$$

THÉORÈME VII. — *L'expression* I_{gy} (contour tang μ), *relative à une flottaison* FL, *est la dérivée par rapport à z, c'est-à-dire dans la direction perpendiculaire à* FL, *du moment d'inertie* I_{gy} *de l'aire de cette flottaison par rapport au même axe*

$$I_{gy}(\text{contour tang}\,\mu) = \left[\frac{d}{dz} I_{gy}(\text{aire})\right]_0.$$

Soient, en effet (*fig.* 163), la flottaison FL et une flottaison parallèle F″L″ située à la distance dz de la première. Projetons F″L″ sur FL et évaluons dI_{gy}(aire). Cette différentielle est égale à

$$I_{g''y''}(\text{aire F''L''}) - I_{gy}(\text{aire FL}).$$

Or $I_{g''y''}$(aire F″L″) est égal, à un infiniment petit près, à I_{gy}(aire F″L″), en sorte que l'on peut écrire

$$dI_{gy}(\text{aire}) = I_{gy}(\text{aire des bandes FF'' et LL''}) = \int ds\, d\nu . i^2$$

ou, parce que $d\nu = dz \operatorname{tang}\mu$, et que dz est ici constant,

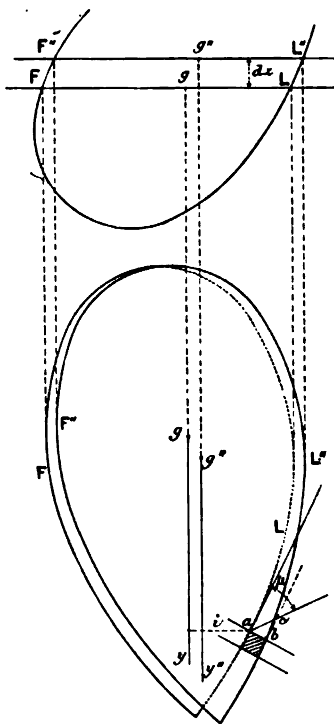
$$= dz \int ds . i^2 \operatorname{tang}\mu,$$

$$= dz\, I_{gy}(\text{contour tang}\,\mu);$$

d'où enfin

$$I_{gy}(\text{contour tang}\,\mu) = \left[\frac{d}{dz}\, I_{gy}(\text{aire})\right]_0 \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Fig. 163.



On démontrerait de même la relation

$$P_{gxy}(\text{contour tang}\,\mu) = \left[\frac{d}{dz}\, P_{gxy}(\text{aire})\right]_0.$$

Corollaire I. — On déduit de là, en prenant non plus z comme variable indépendante, mais le volume de carène V, que l'on a aussi,

$$\frac{I_{gy}(\text{contour tang}\,\mu)}{S} = \left[\frac{d}{dV}\, I_{gy}(\text{aire})\right]_0 = \imath$$

et

$$\frac{P_{gxy}(\text{contour tang}\,\mu)}{S} = \left[\frac{d}{dV}\, P_{gxy}(\text{aire})\right]_0,$$

car on a la relation $dz \times S = dV$.

Corollaire II. — La surface (F) peut être à courbures opposées au point g.

Soient, en effet, gl' et gm' les deux directions perpendiculaires qui donnent I_{gy}(contour tang μ) maximum et minimum. On aura

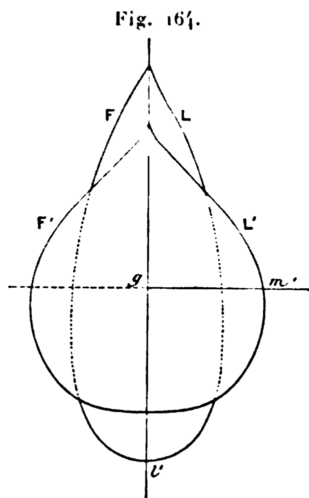
$$\mathfrak{R} = \frac{I_{gm'}(\text{contour tang}\,\mu)}{S} \qquad \text{et} \qquad \mathfrak{r} = \frac{I_{gl'}(\text{contour tang}\,\mu)}{S}.$$

Remarquons que l'on peut encore écrire

$$\mathfrak{R} = \left[\frac{dI_{gm'}(\text{aire})}{dV}\right]_0 \qquad \text{et} \qquad \mathfrak{r} = \left[\frac{dI_{gl'}(\text{aire})}{dV}\right]_0.$$

Il suffit donc, pour que $\mathfrak{R}$ et $\mathfrak{r}$ soient de signes différents, que, si l'on immerge le navire d'un volume dV à partir de V_0, l'un des moments d'inertie $I_{gm'}$ ou $I_{gl'}$ de l'aire de la flottaison aille en

Fig. 164.



augmentant, et que l'autre aille en diminuant; or cette circonstance se présentera si cette immersion fait passer la flottaison d'une forme, telle que FL (*fig.* 164), à une forme telle que F'L'.

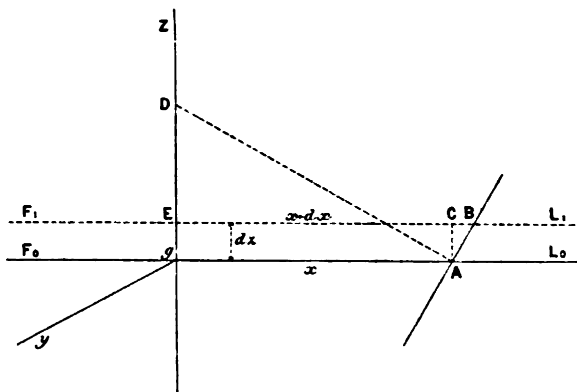
Corollaire III. — L'indicatrice de la surface (F) en g peut être une hyperbole.

Une interprétation curieuse de la formule $\mathfrak{r} = \left[\frac{dI_{gy}(\text{aire})}{dV}\right]_0$,

trouvée ci-dessus (corollaire I) pour le rayon de courbure en g de la courbe enveloppe des flottaisons relative à un axe d'inclinaison gy, a été fournie par M. Doyère, ingénieur de la Marine.

Prenons (*fig.* 165) une section quelconque du flotteur perpen-

Fig. 165.



diculaire à l'axe gy d'inclinaison. Marquons la flottaison considérée F_0L_0 et la flottaison parallèle infiniment voisine F_1L_1.

Les moments d'inertie des flottaisons F_0L_0 et F_1L_1 par rapport aux axes de direction gy sont

$$I_{gy}(\text{aire}) = \frac{1}{3}\int x^3\,dy,$$

et

$$(I + dI)(\text{aire}) = \frac{1}{3}\int (x + dx)^3\,dy = \frac{1}{3}\int x^3\,dy + \int (x^2\,dx)\,dy:$$

d'où

$$dI_{gy}(\text{aire}) = \int (x^2\,dx)\,dy,$$

en appelant x les ordonnées de la flottaison F_0L_0 perpendiculaires à gy et en négligeant dans $(x + dx)^3$ les infiniment petits d'ordre supérieur au premier.

Mais, dans les triangles semblables gAD et ACB, on a

$$\frac{x}{\overline{gD}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{CB}} \quad \text{ou} \quad \frac{x}{h} = \frac{dz}{dx} \quad \text{ou} \quad x\,dx = h\,dz,$$

en appelant h la sous-normale $\overline{gD}$ à la flottaison dans la section perpendiculaire à gy.

On a donc

$$[d\mathrm{I}_{gy}(\text{aire})]_0 = dz\int hx\,dy$$

et, d'autre part,

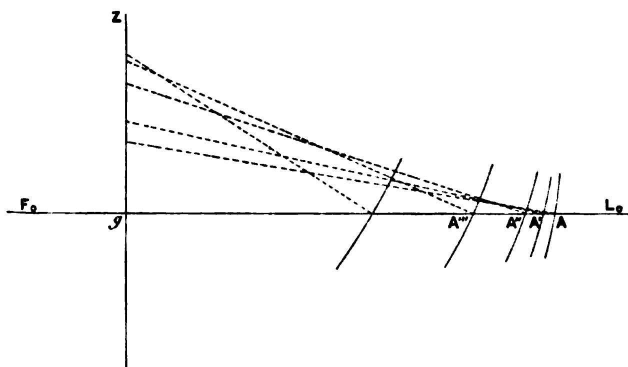
$$(d\mathrm{V})_0 = dz\int x\,dy,$$

d'où

$$\iota = \frac{\int hx\,dy}{\int x\,dy}.$$

Si l'on mène en A, A′, A″, ... (*fig.* 166) les normales au contour de toutes les sections du flotteur perpendiculaires à *gy* le long de la flottaison considérée F_0L_0, ces normales définissent une

Fig. 166.



surface réglée à plan directeur que M. Doyère appelle la *surface réglée supplémentaire de la carène pour la flottaison* OA *et l'axe d'inclinaison gy*. Le volume Υ de la portion de l'espace comprise entre cette surface et la flottaison F_0L_0 est

$$\Upsilon = \frac{1}{2}\int hx\,dy,$$

et, comme l'aire S de F_0L_0 est

$$S = \int x\,dy,$$

on a finalement pour ι

$$\iota = 2\frac{\Upsilon}{S},$$

c'est-à-dire que *le rayon de courbure* ι *en g de la courbe enveloppe des flottaisons, relative à un axe d'inclinaison gy*, est

égal à deux fois la hauteur d'un cylindre ayant pour base la flottaison du point g et ayant pour volume celui que limite la surface complémentaire de la carène pour la flottaison considérée et l'axe d'inclinaison gy.

Théorème VIII. — *Les éléments géométriques* ξ', η', ζ' *et* ι *de la surface* (F) *en un point g, relatifs à un certain axe d'inclinaison gy, sont reliés aux éléments semblables de la surface* (C) *au point* C, *qui correspond à la même flottaison initiale* FL *et au même axe d'inclinaison, par les relations suivantes :*

$$\xi' = \xi + V_0\left(\frac{d\xi}{dV}\right)_0,$$

$$\eta' = \eta + V_0\left(\frac{d\eta}{dV}\right)_0,$$

$$\zeta' = \zeta + V_0\left(\frac{d\zeta}{dV}\right)_0,$$

$$\iota = \rho + V_0\left(\frac{d\rho}{dV}\right)_0.$$

Ces relations, dont la dernière, relative aux rayons de courbure, a été démontrée pour la première fois par M. Émile Leclert, ingénieur de la Marine ([1]), résultent de ce qui a été démontré au théorème précédent.

Nous savons, en effet, que

$$\xi = d\theta\,\frac{I_{gy}(\text{aire})}{V_0}$$

ou encore que

$$I_{gy}(\text{aire}) = \frac{\xi V_0}{d\theta}.$$

Si donc, au lieu de faire varier θ et de garder le volume V_0 constant, nous gardons $d\theta$ constant et faisons varier V_0, la différentielle de I_{gy}(aire) sera

$$dI_{gy}(\text{aire}) = \frac{\xi\, dV_0 + V_0\, d\xi}{d\theta}$$

ou

$$d\theta\left[\frac{d}{dV}I_{gy}(\text{aire})\right]_0 = \xi + V_0\left(\frac{d\xi}{dV}\right)_0 = \xi' \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

([1]) Leclert, ingénieur de la Marine, *Note sur la relation existant entre la courbure de la surface des flottaisons d'un flotteur et la hauteur métacentrique.* (*Mémorial du Génie maritime,* 5e livraison, p. 42 ; 1870.)

Le même raisonnement s'applique de tout point aux autres éléments géométriques. Pour le dernier, on a, en particulier,

$$I_{gy}(\text{aire}) = V_0 \rho,$$

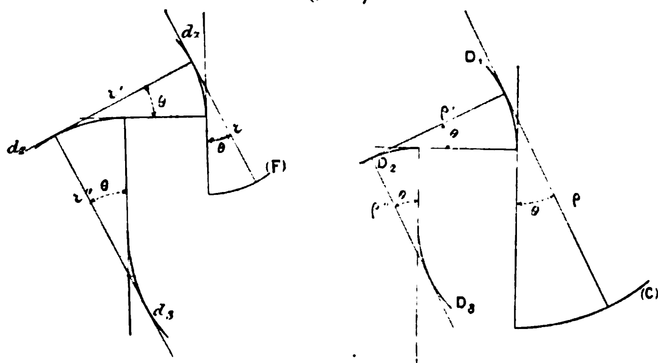
d'où

$$dI_{gy}(\text{aire}) = \rho\, dV_0 + V_0\, d\rho \qquad \text{ou} \qquad \frac{dI_{gy}(\text{aire})}{dV} = \iota = \rho + V_0 \left(\frac{d\rho}{dV}\right)_0.$$

Corollaire I. — Il existe une relation de même forme entre les rayons, correspondant à un même angle θ, des développées d'un ordre quelconque des sections droites des cylindres projetant les surfaces (C) et (F) sur un même plan d'inclinaison.

Soient, en effet (*fig.* 167), les deux sections droites en question

Fig. 167.



tion (F) et (C); pour un angle θ quelconque, on a entre les rayons ι et ρ des développées premières la relation

$$\iota = \rho + V_0 \left(\frac{d\rho}{dV}\right)_0,$$

parce que cette relation a été établie quelle que soit la flottaison isocarène considérée comme flottaison initiale.

Prenons maintenant les dérivées par rapport à θ : en considérant cet élément comme variable et le volume V_0 comme constant, nous aurons

$$\frac{d\iota}{d\theta} = \frac{d\rho}{d\theta} + V_0 \frac{d^2\rho}{dV\, d\theta} \qquad \text{ou} \qquad = \frac{d\rho}{d\theta} + V_0 \left[\frac{d}{dV}\left(\frac{d\rho}{d\theta}\right)\right]_0,$$

et comme $\frac{d\rho}{d\theta}$ et $\frac{d\iota}{d\theta}$ ne sont autre chose que les rayons ρ' et ι' des

développées secondes, on peut écrire

$$\iota' = \rho' + V_0 \left(\frac{d\rho'}{dV}\right)_0.$$

En différentiant une seconde fois, puis une troisième, etc., on étendra la relation aux rayons correspondants des développées d'ordre n des sections droites (F) et (C),

$$\iota^{(n)} = \rho^{(n)} + V_0 \left(\frac{d\rho^{(n)}}{dV}\right)_0.$$

Ce corollaire est dû à M. Guyou.

Corollaire II. — Le théorème de Leclert généralisé permet de déduire la surface (F) appartenant aux isocarènes V_0 de la connaissance de la surface (C) correspondante et de la surface (C) voisine appartenant aux isocarènes de volume $V_0 + dV_0$.

THÉORÈME IX. — *La conique d'inertie du contour, chargé à* tang μ, *de la flottaison et la conique dérivée d'inertie de l'aire de la flottaison pour une immersion* dV *sont semblables et semblablement orientées.*

L'ellipse d'inertie de l'aire de la flottaison, rapportée à deux axes rectangulaires quelconques, gl et gm, a pour équation

$$(a) \qquad 1 = I_{gm} X^2 + I_{gl} Y^2 - 2 P_{glm} XY.$$

Cela résulte de ce qu'on a pris $gM = \frac{1}{\sqrt{I_{gy}}}$, et de ce qu'on a la relation

$$(1) \qquad I_{gy} = I_{gm} \sin^2\beta + I_{gl} \cos^2\beta + 2 P_{glm} \sin\beta \cos\beta.$$

Donnons à V_0 un accroissement dV_0 et posons

$$\left(\frac{dI_{gy}}{dV}\right)_0 = I'_{gy}, \quad \left(\frac{dI_{gl}}{dV}\right)_0 = I'_{gl}, \quad \left(\frac{dI_{gm}}{dV}\right)_0 = I'_{gm}, \quad \left(\frac{dP_{glm}}{dV}\right)_0 = P'_{glm}.$$

En prenant la dérivée de (1) par rapport à V, il viendra

$$(2) \qquad I'_{gy} = I'_{gm} \sin^2\beta + I'_{gl} \cos^2\beta + 2 P'_{glm} \sin\beta \cos\beta.$$

Si donc nous portons sur gy (*fig.* 168) une longueur gM', telle que $gM' = \frac{1}{\sqrt{I'_y}} = \rho'$, on aura, pour les coordonnées du

point M',

$$-x' = \rho' \sin\beta,$$
$$y' = \rho' \cos\beta$$

et

$$I'_{gy} = \frac{1}{\rho'^2};$$

d'où l'équation du lieu du point M'

$$(b) \qquad 1 = I'_{gm} x'^2 + I'_{gl} y'^2 - 2 P'_{glm} x' y'.$$

C'est cette conique qu'on appelle la *conique dérivée d'inertie* de l'aire de la flottaison, suivant la dénomination proposée par M. Guyou dans sa *Théorie du navire*.

Fig. 168.

Les axes principaux de la conique d'inertie (a) et de la conique dérivée (b) ont leurs directions α et α' données par

$$\tang 2\alpha = -\frac{2 P_{glm}}{I_{gm} - I_{gl}} \qquad \text{et} \qquad \tang 2\alpha' = -\frac{2 P'_{glm}}{I'_{gm} - I'_{gl}};$$

car la relation connue

$$P_{gxy} = \tfrac{1}{2}(I_{gm} - I_{gl}) \sin 2\beta + P_{glm} \cos 2\beta$$

donne, si on la dérive par rapport à V, une relation analogue entre les dérivées P'_{gxy}, I'_{gm}, I'_{gl} et P'_{glm}. Les axes principaux des coniques (a) et (b) ne coïncident donc pas, en général, et les deux courbes ne sont ni orientées de même ni semblables.

Si les axes de coordonnées gm et gl sont les axes principaux de l'ellipse d'inertie, il n'en est pas nécessairement de même pour la conique dérivée, car $P_{glm} = 0$ n'entraîne pas $P'_{glm} = 0$. Enfin, la conique dérivée n'est pas forcément une ellipse; c'est une hyperbole, si les valeurs de I'_{gm} et de I'_{gl} ne sont pas de même signe.

Cela posé, si nous construisons maintenant une courbe en portant sur gy une longueur

$$\rho'' = gM'' = \frac{1}{\sqrt{I_{gy}(\text{contour tang}\,\mu)}},$$

on retombera sur une conique semblable à la conique dérivée (b); car on a démontré la relation

$$\frac{I_{gy}(\text{contour tang}\,\mu)}{S} = I'_{gy}.$$

La conique d'inertie du contour chargé à tang μ a donc pour vecteur

$$\rho'' = \frac{1}{\sqrt{S}\sqrt{I'_{gy}}} = \rho' \frac{1}{\sqrt{S}}.$$

Elle est donc semblable à la conique (b) et a même orientation.

Corollaire I. — On remplacera avec avantage, pour l'étude de la courbure de la surface (F), la conique d'inertie du contour chargé à tang μ par la conique dérivée d'inertie, dont les coefficients sont plus faciles et moins longs à calculer.

Le théorème de Dupin ayant donné aux coordonnées ξ', η', ζ' une forme tout à fait analogue à celle des expressions de ξ, η, ζ, nous allons retrouver, pour la surface (F), une série de théorèmes analogues à ceux déjà démontrés pour la surface (C). Nous nous contenterons de les énoncer.

Théorème X (analogue au théorème IX). — *Le rayon de courbure en g de la section plane normale à la surface* (F), *passant par le centre g' de la flottaison voisine correspondant à une inclinaison autour d'un certain axe gy, a pour valeur*

$$r_1 = \frac{1}{S}\left[\frac{I^2_{gy}(\text{contour tang}\,\mu) + P^2_{gxy}(\text{contour tang}\,\mu)}{I_{gy}(\text{contour tang}\,\mu)}\right]$$

ou encore

$$r_1 = r + \frac{1}{r}\,\frac{P^2_{gxy}(\text{contour tang}\,\mu)}{S^2}.$$

Théorème XI (analogue au théorème X). — *Les tangentes aux deux lignes de courbure de la surface* (F) *en g sont parallèles aux axes de la conique d'inertie gl' et gm' du contour*

chargé à tang μ *de la flottaison* FL *qui a pour centre le point g.*

Corollaire I. — Les rayons de courbure principaux $\mathfrak{R}_1$ et $\mathfrak{r}_1$ sont les valeurs particulières maxima et minima, $\mathfrak{R}$ et $\mathfrak{r}$, de ι.

Corollaire II. — L'indicatrice de la surface (F) en g a ses axes parallèles aux axes de la conique d'inertie du contour chargé à tang μ de la flottaison FL.

Théorème XII (analogue au théorème XI). — *L'indicatrice en g de la surface* F *a même orientation que la conique d'inertie du contour chargé à* tang μ *de la flottaison* FL. *De plus, ces deux coniques sont géométriquement semblables.*

Théorème XIII (analogue au théorème XII). — *La section normale en g à la surface* (F), *qui passe par* g'_1, *situé dans le plan de l'indicatrice et obtenu par inclinaison autour d'un axe gy, a pour trace sur l'indicatrice une direction conjuguée de celle de gy.*

Théorème XIV (analogue au théorème XIII). — *Le rayon de courbure* ι *en* g_1 *d'une section droite d'un cylindre quelconque projetant la surface* (F) *parallèlement à un axe d'inclinaison gy s'exprime, en fonction des rayons de courbure principaux* $\mathfrak{R}_1$ *et* $\mathfrak{r}_1$ *de la surface* (F) *en g et de l'angle* β *que fait gy avec le grand axe de la conique d'inertie du contour chargé à* tang μ *de la flottaison, par la relation*

$$\iota = \mathfrak{R}_1 \sin^2\beta + \mathfrak{r}_1 \cos^2\beta.$$

Théorème XV (analogue au théorème XIV). — *Le rayon de courbure* ι_1 *en* g_1 *d'une section normale en g à la surface* (F) *et correspondant à un axe d'inclinaison gy s'exprime, en fonction des rayons de courbure principaux* $\mathfrak{R}_1$ *et* $\mathfrak{r}_1$ *de la surface* (F) *en g et de l'angle* β *que fait gy avec le grand axe de la conique d'inertie du contour chargé à* tang μ *de la flottaison, par la relation*

$$\iota_1 = \frac{(\mathfrak{R}_1^2 - \mathfrak{r}_1^2)\sin^2\beta + \mathfrak{r}_1^2}{(\mathfrak{R}_1 - \mathfrak{r}_1)\sin^2\beta + \mathfrak{r}_1} \quad \text{ou} \quad \frac{\mathfrak{R}_1^2 \sin^2\beta + \mathfrak{r}_1^2 \cos^2\beta}{\mathfrak{R}_1 \sin^2\beta + \mathfrak{r}_1 \cos^2\beta}.$$

De plus, les directions de la section normale et de l'axe gy

sont conjuguées dans la conique d'inertie du contour, et l'on a

$$\tang\omega = \frac{\mathfrak{R}_1}{\mathfrak{r}_1}\tang\beta.$$

Réciproquement, *si, sur une direction* gg', *faisant l'angle* ω *avec l'axe d'inertie maxima du contour chargé à* $\tang\mu$ *de la flottaison, on porte la racine carrée du rayon* $\mathfrak{r}_1$ *calculé comme ci-dessus, et en prenant pour* β *l'angle donné par la relation* $\tang\omega = \frac{\mathfrak{R}_1}{\mathfrak{r}_1}\tang\beta$, *le lieu du point* g'_1 *obtenu sera une conique semblable à l'indicatrice de la surface* (F) *en* g.

Théorème XVI (analogue au théorème XV). — *Si, sur la direction d'un axe d'inclinaison gy, défini par l'angle* β *qu'il fait avec le grand axe de la conique d'inertie du contour chargé à* $\tang\mu$ *de la flottaison, on porte une longueur* $\frac{1}{\sqrt{\mathfrak{r}}}$, $\mathfrak{r}$ *étant calculé par la formule* $\mathfrak{r} = \mathfrak{R}_1 \sin^2\beta + \mathfrak{r}_1\cos^2\beta$, *on obtient un point* m *dont le lieu géométrique est une conique semblable à l'indicatrice de la surface* (F) *en* g *et semblablement orientée.*

CHAPITRE XVI.

GÉOMÉTRIE DE LA SURFACE (T) DES TRANCHES ISOCARÈNES DE VOLUME ΔV_0 ADDITIVES AU VOLUME V_0.

83. Étude de la surface (T) et de sa courbure autour d'un point.

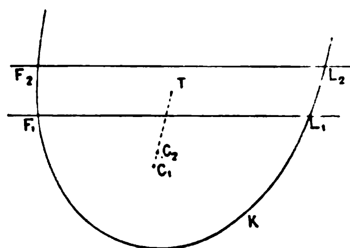
Définition. — On appelle *tranche isocarène* de volume ΔV_0 additive au volume V_0 une tranche comprise entre les deux isocarènes de volumes V_0 et $V_0 + \Delta V_0$, limitées par des flottaisons parallèles. La hauteur Δz de la tranche varie avec l'inclinaison de ces flottaisons parallèles.

On appelle *surface* (T) des tranches isocarènes de volume ΔV_0 additives au volume V_0 le lieu géométrique des centres des volumes de ces tranches.

THÉORÈME I. — *Le plan tangent à la surface* (T) *en un point* T *quelconque est parallèle aux flottaisons limites correspondantes des isocarènes de volumes* V_0 *et* $V_0 + \Delta V_0$ (*fig.* 169).

Soient, en effet, les deux flottaisons parallèles $F_1 L_1$ et $F_2 L_2$, détachant une tranche de volume ΔV_0 dont le centre est en T. La

Fig. 169.



carène $F_2 K L_2$, de volume $V_0 + \Delta V_0$, a son centre en C_2; la carène $F_1 K L_1$, de volume V_0, a son centre en C_1. La carène

$V_0 + \Delta V_0$ étant la résultante de la carène V_0 et de la tranche ΔV_0, le point C_2 se trouve, dans l'espace, sur la droite $C_1 T$.

Prenons maintenant trois axes passant par le point C_1 : $C_1 z$ vertical perpendiculaire aux flottaisons $F_1 L_1$ et $F_2 L_2$; $C_1 y$ parallèle à une direction d'inclinaison quelconque; $C_1 x$ parallèle à la trace horizontale du plan d'inclinaison correspondant.

Désignons par x_2, y_2, z_2 les coordonnées du point C_2, x_t, y_t, z_t celles du point T. Nous aurons d'abord, pour exprimer que les points C_1, C_2, T sont en ligne droite, à prendre les moments par rapport aux plans coordonnés

$$(1)\quad \begin{cases} x_t \,\Delta V_0 = x_2 (V_0 + \Delta V_0), \\ y_t \,\Delta V_0 = y_2 (V_0 + \Delta V_0), \\ z_t \,\Delta V_0 = z_2 (V_0 + \Delta V_0). \end{cases}$$

Donnons maintenant une inclinaison infiniment petite $d\theta$ au flotteur autour de l'axe d'inclinaison $C_1 y$; le point C_1 viendra en C'_1 (coordonnées ξ, η, ζ), correspondant à une flottaison $F'_1 L'_1$: le volume constant ΔV_0 détermine une seconde flottaison parallèle, $F'_2 L'_2$, et un point T′ (coordonnées $x_t + \xi_t$, $y_t + \eta_t$, $z_t + \zeta_t$) : enfin le nouveau point C'_2 se trouve sur $C'_1 T'$ et a pour coordonnées $x_2 + \xi_2$, $y_2 + \eta_2$, $z_2 + \zeta_2$. En prenant les moments par rapport aux plans coordonnés, nous aurons

$$\begin{aligned} (x_t + \xi_t)\,\Delta V_0 + \xi V_0 &= (x_2 + \xi_2)(V_0 + \Delta V_0), \\ (y_t + \eta_t)\,\Delta V_0 + \eta V_0 &= (y_2 + \eta_2)(V_0 + \Delta V_0), \\ (z_t + \zeta_t)\,\Delta V_0 + \zeta V_0 &= (z_2 + \zeta_2)(V_0 + \Delta V_0), \end{aligned}$$

système qui, grâce au système (1), se simplifie et devient

$$(2)\quad \begin{cases} \xi_t \,\Delta V_0 + \xi V_0 = \xi_2 (V_0 + \Delta V_0), \\ \eta_t \,\Delta V_0 + \eta V_0 = \eta_2 (V_0 + \Delta V_0), \\ \zeta_t \,\Delta V_0 + \zeta V_0 = \zeta_2 (V_0 + \Delta V_0). \end{cases}$$

Si nous considérons, en particulier, la troisième équation du système (2) et si nous remarquons que ζ_2 est la distance au plan tangent en C_2 à la surface (C) de l'isocarène $(V_0 + \Delta V_0)$ du point C'_2 infiniment voisin pour une certaine direction d'inclinaison, nous voyons que $\zeta_t = \zeta_2 \dfrac{V_0 + \Delta V_0}{\Delta V_0} - \zeta \dfrac{V_0}{\Delta V_0}$ est un infiniment petit du second ordre, quelle que soit la valeur finie de ΔV_0, et cela pour une direction d'inclinaison quelconque. Donc le point T′ est à une distance infiniment petite du second ordre d'un plan

parallèle aux flottaisons F_1L_1 et F_2L_2 passant par T. Donc le plan tangent en T à la surface (T) est parallèle à ces flottaisons. C. Q. F. D.

Théorème II. — *Les coordonnées ξ_t, η_t, ζ_t, par rapport à un axe et à un plan d'inclinaison passant par* T, *d'un point* T' *infiniment voisin de* T *et relatif à cette direction d'inclinaison, ont pour valeurs*

$$\xi_t = d\theta \frac{\Delta I_{gy}}{\Delta V_0},$$

$$\eta_t = d\theta \frac{\Delta P_{gxy}}{\Delta V_0},$$

$$\zeta_t = \frac{d\theta^2}{2} \frac{\Delta I_{gy}}{\Delta V_0}.$$

Prenons, en effet, le système (2), obtenu au théorème précédent,

$$\xi_t = \xi_2 \frac{V_0 + \Delta V_0}{\Delta V_0} - \xi \frac{V_0}{\Delta V_0},$$

$$\eta_t = \eta_2 \frac{V_0 + \Delta V_0}{\Delta V_0} - \eta \frac{V_0}{\Delta V_0},$$

$$\zeta_t = \zeta_2 \frac{V_0 + \Delta V_0}{\Delta V_0} - \zeta \frac{V_0}{\Delta V_0},$$

et remplaçons ξ_2, η_2, ζ_2, ξ, η, ζ par leurs valeurs respectives données dans la Géométrie de la surface (C), il viendra

$$\xi_t = d\theta \frac{I_{g_2 y_2}(F_2L_2)}{V_0 + \Delta V_0} \frac{V_0 + \Delta V_0}{\Delta V_0} - d\theta \frac{I_{g_1 y_1}(F_1L_1)}{V_0} \frac{V_0}{\Delta V_0},$$

$$\eta_t = d\theta \frac{P_{g_2 x_2 y_2}(F_2L_2)}{V_0 + \Delta V_0} \frac{V_0 + \Delta V_0}{\Delta V_0} - d\theta \frac{P_{g_1 x_1 y_1}(F_1L_1)}{V_0} \frac{V_0}{\Delta V_0},$$

$$\zeta_t = \frac{d\theta^2}{2} \frac{I_{g_2 y_2}(F_2L_2)}{V_0 + \Delta V_0} \frac{V_0 + \Delta V_0}{\Delta V_0} - \frac{d\theta^2}{2} \frac{I_{g_1 y_1}(F_1L_1)}{V_0} \frac{V_0}{\Delta V_0},$$

ce qui, simplifié, donne

$$\xi_t = \frac{d\theta}{\Delta V_0} [I_{g_2 y_2}(F_2L_2) - I_{g_1 y_1}(F_1L_1)],$$

$$\eta_t = \frac{d\theta}{\Delta V_0} [P_{g_2 x_2 y_2}(F_2L_2) - P_{g_1 x_1 y_1}(F_1L_1)],$$

$$\zeta_t = \frac{d\theta^2}{2\Delta V_0} [I_{g_2 y_2}(F_2L_2) - I_{g_1 y_1}(F_1L_1)]$$

ou encore, en considérant les facteurs d'inertie de l'aire de la flottaison comme des fonctions du volume, variables avec l'immer-

sion suivant une direction fixe,

$$\xi_t = d\theta \frac{\Delta I_{gy}}{\Delta V_0}, \qquad \eta_t = d\theta \frac{\Delta P_{gxy}}{\Delta V_0}, \qquad \zeta_t = \frac{d\theta^2}{2} \frac{\Delta I_{gy}}{\Delta V_0} \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Théorème III. — *Le rayon de courbure τ en T de la section droite du cylindre projetant la surface* (T) *sur un plan d'inclinaison constant est égal à* $\tau = \frac{\Delta I_{gy}(\text{aire})}{\Delta V_0}$.

En effet, ce rayon de courbure est égal à $\frac{\xi_t}{d\theta}$, d'où l'expression ci-dessus, en substituant à ξ_t sa valeur.

Théorème IV. — *Le rayon de courbure τ_1 en T_1 de la section normale en* T *à la surface* (T) *passant par le point voisin* T' *relatif à une certaine direction gy d'axe d'inclinaison a pour valeur*

$$\tau_1 = \frac{1}{\Delta V_0} \left[\frac{\Delta^2 P_{gxy}(\text{aire}) + \Delta^2 I_{gy}(\text{aire})}{\Delta I_{gy}(\text{aire})} \right],$$

et la section normale fait avec le plan d'inclinaison un angle ω *donné par*

$$\operatorname{tang}\omega = \frac{\Delta P_{gxy}(\text{aire})}{\Delta I_{gy}(\text{aire})}.$$

En effet, on a

$$\operatorname{tang}\omega = \frac{\eta_t}{\xi_t}$$

et, dans le plan de la section normale,

$$2\tau_1\zeta_t = \eta_t^2 + \xi_t^2.$$

Corollaire I. — Les rayons de courbure principaux, t_1 et T_1 de la surface (T), sont égaux aux rayons t et T, minimum et maximum de τ.

Théorème V. — *L'indicatrice de la surface* (T) *en* T *est semblable à la conique différentielle d'inertie de la flottaison, et ces deux courbes ont la même orientation.*

Nous appelons ici *conique différentielle d'inertie de la flottaison* celle qu'on obtient en portant sur un vecteur *gl* une longueur égale à l'inverse de la racine carrée du rapport $\frac{\Delta I_{gl}}{\Delta V}$.

Cela posé, si l'on appelle t_1 et T_1 le minimum et le maximum du rayon de courbure des sections normales en T à la surface (T),

l'équation de l'indicatrice est, en coordonnées polaires, par rapport à son centre et à son grand axe,

$$(a)\qquad \frac{1}{\rho^2} = \frac{\sin^2\omega}{2t_1 h} + \frac{\cos^2\omega}{2T_1 h},$$

en appelant h la distance du plan de l'indicatrice au plan tangent en T.

Pour avoir l'équation de la conique différentielle d'inertie, nous nous reporterons à la relation connue

$$I_{gl} = I_{gx}\sin^2\beta + I_{gy}\cos^2\beta + 2P_{gxy}\sin\beta\cos\beta,$$

qui, appliquée, pour les mêmes directions d'axes, à la seconde flottaison, résultant de l'accroissement ΔV donné au volume, fournit

$$I_{gl} + \Delta I_{gl} = (I_{gx} + \Delta I_{gx})\sin^2\beta$$
$$+ (I_{gy} + \Delta I_{gy})\cos^2\beta + 2(P_{gxy} + \Delta P_{gxy})\sin\beta\cos\beta$$

et, par différence,

$$\Delta I_{gl} = \Delta I_{gx}\sin^2\beta + \Delta I_{gy}\cos^2\beta + 2\Delta P_{gxy}\sin\beta\cos\beta.$$

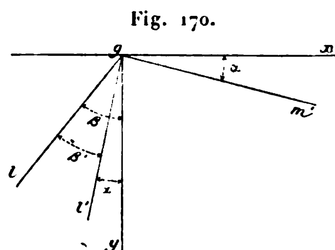
On aurait de même

$$\Delta P_{glm} = \tfrac{1}{2}(\Delta I_{gx} - \Delta I_{gy})\sin 2\beta + \Delta P_{gxy}\cos 2\beta.$$

Si, maintenant, nous prenons deux axes, gl', gm' (*fig.* 170), faisant avec les axes gx, gy un angle α donné par

$$\tan g\, 2\alpha = -2\frac{\Delta P_{gxy}}{\Delta I_{gx} - \Delta I_{gy}},$$

Fig. 170.



le $\Delta P_{gl'm'}$, par rapport à ces axes, sera nul, et le ΔI_{gl}, par rapport à ces axes, sera, en appelant β' l'angle de gl avec gl',

$$\Delta I_{gl} = \Delta I_{gm'}\sin^2\beta' + \Delta I_{gl'}\cos^2\beta';$$

d'où

$$\frac{\Delta I_{gl}}{\Delta V} = \frac{\Delta I_{gm'}}{\Delta V} \sin^2 \beta' + \frac{\Delta I_{gl'}}{\Delta V} \cos^2 \beta'.$$

Nous pouvons donc écrire, en appelant ρ' le vecteur de la conique différentielle d'inertie,

$$(b) \qquad \frac{1}{\rho'^2} = \frac{\Delta I_{gm'}}{\Delta V} \sin^2 \beta' + \frac{\Delta I_{gl'}}{\Delta V} \cos^2 \beta',$$

équation qui est celle de ladite conique, en coordonnées polaires, par rapport à son centre et à l'axe gl'.

Reste à prouver que les coniques (a) et (b) sont semblables et semblablement orientées. En effet :

1° Les directions des axes des deux coniques coïncident; car, pour les directions gl' et gm', où $\Delta P_{gl'm'} = 0$, on a $\tau_t = 0$; donc, sur ces directions, les normales infiniment voisines à la surface (T) se rencontrent; donc les axes de l'indicatrice sont dirigés suivant gl' et gm'.

2° Les directions des grands axes des coniques coïncident. Ici, pour la démonstration, il faut se donner le plus grand des deux ΔI. Soit donc $\Delta I_{gm'} > \Delta I_{gl'}$. D'après le théorème IV, on aura :

Le grand axe

$$T_1 = \frac{\Delta I_{gm'}}{\Delta V} = \frac{a^2}{2h},$$

à porter sur une perpendiculaire à gm', c'est-à-dire sur gl';

Le petit axe

$$t_1 = \frac{\Delta I_{gl'}}{\Delta V} = \frac{b^2}{2h},$$

à porter sur gm'.

Mais, pour la direction gl', dans la deuxième conique, on a

$$\beta' = 0 \qquad \text{et} \qquad \rho' = \frac{1}{\sqrt{\frac{\Delta I_{gl'}}{\Delta V}}};$$

ρ' est donc alors maximum, et la direction gl' est bien celle du grand axe pour les deux coniques.

3° Les coniques (a) et (b) sont semblables. En effet, le rapport

des carrés des grands axes est

$$\frac{\dfrac{2hT_1}{1}}{\dfrac{\Delta I_{gl'}}{\Delta V}} = \frac{\Delta I_{gm'}}{\Delta V} \frac{\Delta I_{gl'}}{\Delta V},$$

égal au rapport des carrés des petits axes. C. Q. F. D.

Corollaire I. — Dans l'étude de la courbure de la surface (T), on pourra employer la conique différentielle d'inertie en place de l'indicatrice.

On passera facilement des théorèmes démontrés aux suivants :

THÉORÈME VI. — *Le rayon de courbure* τ *en* T *de la section droite d'un cylindre quelconque projetant la surface* (T) *parallèlement à un axe d'inclinaison gy s'exprime, en fonction des rayons de courbure principaux* t_1 *et* T_1 *en* T *et de l'angle* β *que fait gy avec le grand axe de la conique différentielle d'inertie, par*

$$\tau = T_1 \sin^2\beta + t_1 \cos^2\beta.$$

THÉORÈME VII. — *Le rayon de courbure* τ_1 *en* T *d'une section normale en* T *à la surface* (T) *et correspondant à un axe d'inclinaison gy s'exprime, en fonction des rayons de courbure principaux* t_1 *et* T_1 *en* T *et de l'angle* β *que fait gy avec le grand axe de la conique différentielle d'inertie, par*

$$\tau_1 = \frac{T_1^2 \sin^2\beta + t_1^2 \cos^2\beta}{T_1 \sin^2\beta + t_1 \cos^2\beta}.$$

De plus, les directions de la section normale et de l'axe gy sont conjuguées dans la conique différentielle d'inertie, et l'on a

$$\operatorname{tang}\omega = \frac{T_1}{t_1} \operatorname{tang}\beta.$$

CHAPITRE XVII.

GÉOMÉTRIE DES CARÈNES SYMÉTRIQUES, COMPLÉMENTAIRES ET SUPPLÉMENTAIRES.

84. Carènes symétriques par rapport à un plan.

THÉORÈME I. — *Quand la flottaison est symétrique par rapport à un axe, cet axe est principal d'inertie pour son aire.*

Prenons, en effet, cet axe de symétrie, sur lequel se trouve le centre de gravité g, pour axe gy, et une direction perpendiculaire pour axe gx. A chaque élément de surface $d\omega$, ayant pour coordonnées x et y, correspondra un autre élément égal $d\omega'$, et un seul, ayant pour coordonnées $-x$ et y. Donc on aura

$$P_{gxy} = 0. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Corollaire I. — Quand la flottaison a deux axes de symétrie rectangulaires, ces deux axes sont les axes principaux de l'ellipse d'inertie.

Corollaire II. — Quand la flottaison a deux ou plusieurs axes de symétrie non rectangulaires, ces axes étant chacun principaux d'inertie, l'ellipse d'inertie devient un cercle.

Dans ce dernier cas, qui est celui d'une flottaison circulaire ou polygonale régulière, les rayons de courbure de la surface (C) en C sont tous égaux, et l'on a en particulier $R = r$. Tous les métacentres initiaux de la carène, limitée par la flottaison donnée, se confondent également au même point.

THÉORÈME II. — *Quand un flotteur présente un plan de symétrie perpendiculaire à une flottaison déterminée, ce plan coupe une flottaison quelconque parallèle à la première suivant une droite qui est à la fois un axe de l'ellipse d'inertie de cette*

flottaison, un axe de la conique dérivée d'inertie, et un axe de la conique différentielle d'inertie de cette flottaison.

Soit, en effet, une flottaison quelconque perpendiculaire au plan de symétrie; l'intersection de ces deux plans est, comme nous venons de le voir, un axe principal d'inertie de l'aire de la flottaison : c'est donc la direction d'un des axes de l'ellipse d'inertie de la flottaison, et l'on a, par rapport à cet axe gx et à l'axe perpendiculaire gy,

$$P_{gxy}(\text{aire}) = 0.$$

Cette même relation subsiste par rapport aux directions gx, gy, fixes dans l'espace, pour toute flottaison parallèle à la première; on a donc rigoureusement

$$dP_{gxy}(\text{aire}) = 0$$

et

$$\Delta P_{gxy}(\text{aire}) = 0.$$

Donc les directions gx et gy sont aussi celles des axes : 1° de la conique dérivée d'inertie de la flottaison ; 2° de la conique différentielle d'inertie de la flottaison.

Corollaire I. — Quand un flotteur a un plan de symétrie perpendiculaire à une flottaison donnée, les indicatrices des surfaces (C), (F) et (T), parallèles à cette flottaison, admettent toutes trois pour axe une parallèle à l'intersection de cette flottaison par le plan de symétrie. C'est le cas des navires.

Corollaire II. — Les lignes de courbure des surfaces (C), (F) et (T), aux points où elles sont touchées par un plan tangent parallèle à la flottaison donnée, sont contenues dans le plan de symétrie et dans le plan vertical perpendiculaire.

Corollaire III. — Pour les navires de formes usuelles, les grands rayons de courbure des surfaces (C), (F) et (T), aux points où elles sont touchées par un plan tangent parallèle à la flottaison donnée, sont ceux des lignes de courbure contenues dans le plan de symétrie longitudinal; car les grands axes des indicatrices de (F) et de (T) sont alors, comme celui de (C), contenus dans ce plan. Les petits rayons de courbure sont dans le plan perpendiculaire transversal : ce sont, pour les surfaces (C), les petits rayons métacentriques initiaux, correspondant à des inclinaisons autour d'un axe longitudinal.

THÉORÈME III. — *Pour un axe d'inclinaison de direction constante et perpendiculaire au plan de symétrie du flotteur, les lieux des points* C′, g', T′, *centre de carène, centre de gravité de la flottaison et centre de volume de la tranche isocarène, sont, même pour des inclinaisons finies, tout entiers compris dans le plan de symétrie.*

En effet, pour toutes les inclinaisons envisagées, la carène et les surfaces (F), (C) et (T) restent symétriques par rapport au plan d'inclinaison; les points C′, g', T′ doivent donc décrire sur leur surface respective (C), (F) ou (T) la courbe d'intersection même de la surface par le plan de symétrie.

Cette propriété n'a lieu, en ce qui concerne les inclinaisons transversales, que pour des inclinaisons infiniment petites.

85. Carènes complémentaires.

Définitions. — On appelle *carènes complémentaires* les deux parties d'un même corps fermé, séparées par un plan de flottaison. Si la flottaison se déplace de façon à détacher d'un côté des isocarènes de volume V, elle détache en même temps de l'autre côté des isocarènes de volume V′ = W — V, en appelant W le volume total du corps fermé.

On dit que deux courbes planes sont homothétiques par rapport à un point fixe O′ du plan, ou que deux surfaces sont homothétiques par rapport à un point fixe O de l'espace, quand il y a un rapport constant entre les longueurs interceptées par ces courbes ou surfaces sur un rayon vecteur quelconque issu du point fixe.

THÉORÈME I. — *Les surfaces* (F) *des isocarènes* V *et des isocarènes complémentaires* V′ *se confondent.*

En effet, ces surfaces sont les enveloppes de plans de flottaison, qui, dans chaque position du corps fermé, sont les mêmes pour les deux carènes considérées.

THÉORÈME II. — *Les surfaces* (C) *des isocarènes* V *et des isocarènes complémentaires* V′ *sont inversement homothétiques par rapport au centre* O *du volume total* W.

En effet, ce centre O, fixe dans l'intérieur du solide, se trouve constamment sur la droite qui joint, dans chaque position du

corps solide, les centres C et C′ des carènes V et V′; on a de plus, sur cette droite, entre les segments OC et OC′ la relation

$$\frac{OC}{OC'} = \frac{V}{V'} = \text{const.} \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

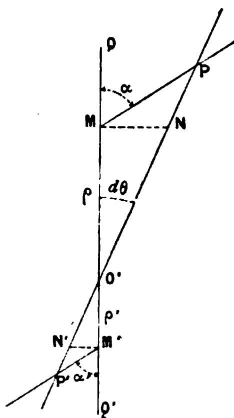
Corollaire I. — Sur un plan d'inclinaison de direction constante, les courbes (C) et (C′) [sections droites des cylindres projetant les surfaces (C) et (C′) sur le plan d'inclinaison] sont inversement homothétiques par rapport à la projection O′ du point O sur le plan d'inclinaison.

En effet, les courbes de contour apparent des surfaces (C) et (C′) sont inversement homothétiques par rapport au point O de l'espace; donc leurs projections sur le plan d'inclinaison sont homothétiques par rapport à la projection du point O sur ce plan.

Théorème III. — *En deux points homologues* M *et* M′ *des courbes* (C) *et* (C′), *les tangentes sont parallèles* (*fig.* 171).

Pour démontrer que les angles $\widehat{PMQ} = \alpha$ et $\widehat{P'M'Q'} = \alpha'$ sont égaux, nous chercherons les expressions de tang α et de tang α′.

Fig. 171.



Dans le triangle NMP, on a

$$\operatorname{tang}\alpha = \frac{MN}{NP} = \frac{\rho\, d\theta}{d\rho},$$

et dans le triangle homologue,

$$\operatorname{tang}\alpha' = \frac{M'N'}{N'P'} = \frac{\rho'\, d\theta}{d\rho'}.$$

Or, par hypothèse,

$$\rho = k\rho' ;$$

d'où

$$d\rho = k\, d\rho',$$

d'où enfin

$$\operatorname{tang}\alpha = \operatorname{tang}\alpha'. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Corollaire. — Les développées de deux courbes homothétiques par rapport à un point sont homothétiques par rapport à ce même point et dans le même rapport d'homothétie que les courbes primitives.

Réciproquement : Si deux courbes sont telles que les tangentes en leurs points d'intersection avec un vecteur issu d'un point fixe soient constamment parallèles, ces deux courbes sont homothétiques par rapport au point fixe.

En effet, les tangentes étant parallèles, on a constamment

$$\operatorname{tang}\alpha' = \operatorname{tang}\alpha,$$

c'est-à-dire une relation différentielle

$$\frac{\rho'}{d\rho'} = \frac{\rho}{d\rho},$$

qui, écrite sous la forme $\frac{d\rho'}{\rho'} = \frac{d\rho}{\rho}$ et intégrée, donne la relation

$$L\rho' = L\rho + Lk = Lk\rho$$

ou

$$\rho' = k\rho,$$

entre les quantités finies ρ' et ρ. Or cette relation est précisément celle qui définit l'homothétie.

Le théorème III et sa réciproque peuvent se généraliser et s'étendre à l'espace ; les tangentes parallèles sont alors remplacées par des plans tangents parallèles.

86. Carènes supplémentaires.

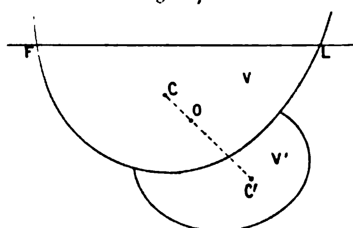
Définition. — Si l'on ajoute à une carène de volume V un appendice de volume V′, ce dernier constituera, tant qu'il restera complètement plongé, une carène supplémentaire V′ à la carène V.

Théorème I. — *Si l'on considère la carène totale* W, *résultant de l'addition de la carène supplémentaire* V′ *à la carène*

V, *cette carène totale* W *a même surface* (F) *que la carène* V (*fig.* 172).

En effet, tant que l'appendice V′ n'émergera pas, le même plan de flottaison limitera, sous un angle quelconque, l'isocarène de

Fig. 172.



volume V pour la carène V, et l'isocarène de volume $W = V + V'$ pour la carène totale.

Théorème II. — *Les surfaces* (C) *de la carène* V *et de la carène totale* W *sont directement homothétiques par rapport au centre de carène de l'appendice, fixe à l'intérieur du flotteur.*

En effet, le centre du volume total et celui de la carène C sont sur une droite qui passe constamment par C′, du même côté par rapport au point C′, et l'on a de plus sur cette droite

$$\frac{CC'}{OC'} = \frac{W}{V} = \text{const.} \qquad \text{C. Q. F. P.}$$



CHAPITRE XVIII.

EXERCICES DE GÉOMÉTRIE DU NAVIRE. — SURFACES (F) ET (C) DE FLOTTEURS A FORMES GÉOMÉTRIQUES.

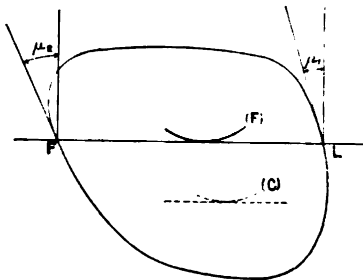
87. Flotteur cylindrique horizontal.

Considérons un flotteur cylindrique à génératrices horizontales et à section droite (ou maître couple) quelconque. Ce cylindre sera supposé limité à deux sections droites.

Dans le cas qui nous occupe, la recherche des courbes (C) et (F) sur le plan du maître couple pris pour plan d'inclinaison constant, c'est-à-dire pour une direction constante d'axe d'inclinaison parallèle aux génératrices, se simplifie et se ramène à un problème de Géométrie plane.

En effet, la flottaison FL (*fig.* 173) est constamment un rec-

Fig. 173.



tangle ayant pour longueur constante L la longueur commune des génératrices du cylindre et pour largeur variable l la longueur de la trace de la flottaison FL sur le maître couple. L'ellipse d'inertie de l'aire de la flottaison a donc ses axes principaux dirigés constamment suivant une parallèle et une perpendiculaire aux génératrices, et il en est de même pour les axes de l'indicatrice de la surface (C), pour tous les points de cette surface correspondant

à des inclinaisons finies autour de l'axe d'inclinaison constant. Tous ces points sont par suite rigoureusement dans le plan d'inclinaison ou section droite médiane et ils y forment une courbe (C) qui se confond avec la section droite du cylindre projetant sur le maître couple la surface (C).

Il en est de même pour la courbe (F), qui est à la fois la courbe de contour apparent et la section droite du cylindre projetant la surface (F) sur le maître couple; la courbe (C) étant contenue dans le plan du maître couple, un de ses points quelconques C, qui est le centre de la carène cylindrique correspondante, sera en même temps le centre de la portion immergée de la section droite de ce cylindre.

De même, la surface (F) étant contenue dans le plan du maître couple, un de ses points quelconques F, qui est le centre de la flottaison rectangulaire correspondante, sera en même temps le centre ou milieu de la trace de cette flottaison sur le maître couple.

Étant ainsi en droit de ne considérer, pour l'axe d'inclinaison choisi, que ce qui se passe dans le plan du maître couple, nous allons chercher les propriétés de ces courbes (F) et (C) :

1° *Rayon de courbure de la courbe* (F), *lieu des milieux de la trace* FL *sur le maître couple.* — Nous savons que le rayon de courbure $\mathfrak{r}$ de cette courbe peut s'obtenir par la formule de Dupin

$$\mathfrak{r} = \frac{I_{gy}(\text{contour tang}\,\mu)}{S}.$$

Or, sur les deux petits côtés du contour rectangulaire d'une flottaison quelconque, $\text{tang}\,\mu = 0$, et l'élément du moment d'inertie est nul. Restent les deux grands côtés; sur chacun d'eux l'angle μ est constant; d'un côté $\mu = \mu_1$, de l'autre $\mu = \mu_2$ (*fig.* 174). L'élément du moment d'inertie est donc : d'un côté

$$dL\,\frac{l^2}{4}\,\text{tang}\,\mu_1$$

et de l'autre

$$dL\,\frac{l^2}{4}\,\text{tang}\,\mu_2;$$

d'où

$$\mathfrak{r} = \frac{L\,\frac{l^2}{4}(\text{tang}\,\mu_1 + \text{tang}\,\mu_2)}{L\,l} = \frac{l}{4}(\text{tang}\,\mu_1 + \text{tang}\,\mu_2).$$

En appliquant la formule de Leclert, on trouve le même résultat, car

$$\mathfrak{r} = \frac{d\mathrm{I}_{gy}(\text{aire})}{d\mathrm{V}};$$

or

$$\mathrm{I}_{gy}(\text{aire}) = \frac{\mathrm{L}\,l^3}{12},$$

d'où

$$d\mathrm{I}_{gy}(\text{aire}) = \frac{\mathrm{L}}{12}\,3\,l^2\,dl = \frac{\mathrm{L}\,l^2}{4}\,dl$$

et

$$d\mathrm{V} = \mathrm{L}\,d\mathrm{S} = \mathrm{L}\,l\,dz,$$

d'où

$$\mathfrak{r} = \frac{l}{4}\,\frac{dl}{dz} = \frac{l}{4}(\operatorname{tang}\mu_1 + \operatorname{tang}\mu_2).$$

La formule trouvée pour $\mathfrak{r}$ montre que, si les murailles d'un navire sont verticales sur une hauteur h au-dessus et h au-dessous

Fig. 174.

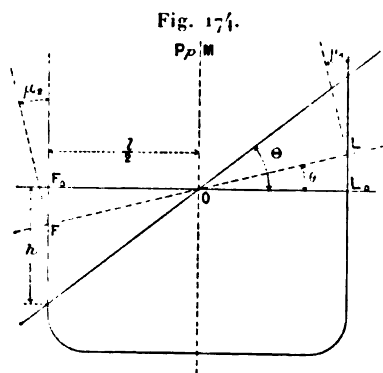
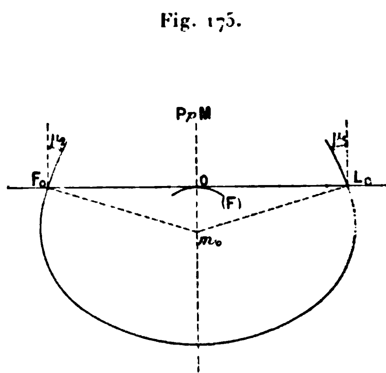


Fig. 175.



de la flottaison (*fig.* 174), le rayon $\mathfrak{r}$ reste constamment nul sur une amplitude Θ donnée par

$$\operatorname{tang}\Theta = \frac{h}{\frac{l}{2}} = \frac{2h}{l}.$$

En effet, pour une flottaison quelconque FL d'inclinaison $\theta < \Theta$, on a $\mu_2 = -\mu_1$, d'où $\operatorname{tang}\mu_1 + \operatorname{tang}\mu_2 = 0$, d'où $\mathfrak{r} = 0$. Pour cette amplitude Θ, la courbe (F) se réduit donc au point O.

D'un autre côté, pour un cylindre horizontal symétrique par rapport au longitudinal (*fig.* 175) on a dans la position droite

$$\mu_2 = \mu_1 = \pm i_0,$$

d'où

$$\mathfrak{r}_0 = \frac{l}{4} 2 \operatorname{tang} i_0 = \frac{l}{2} \operatorname{tang} i_0,$$

$\mathfrak{r}_0$ étant positif ou négatif suivant le signe de i_0.

Construction géométrique du rayon de courbure. — On peut construire géométriquement le rayon de courbure $\mathfrak{r}$ dont l'expression est

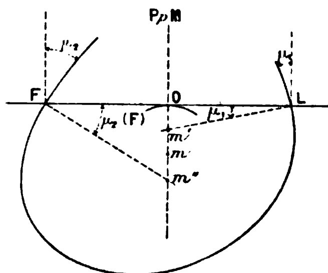
$$\mathfrak{r} = \frac{l}{4}(\operatorname{tang}\mu_1 + \operatorname{tang}\mu_2) = \frac{1}{2}\left(\frac{l}{2}\operatorname{tang}\mu_1 + \frac{l}{2}\operatorname{tang}\mu_2\right).$$

Il n'y a pour cela qu'à mener les normales en F et L au contour du couple jusqu'à la perpendiculaire élevée sur le milieu O de la flottaison FL (*fig.* 176). On a alors évidemment

$$\mathfrak{r} = \tfrac{1}{2}(\mathrm{O}m' + \mathrm{O}m'') = \mathrm{O}m,$$

en prenant le point m au milieu du segment $\overline{m'm''}$. On voit que, dans le cas du flotteur cylindrique horizontal, la *surface réglée supplémentaire* considérée par M. Doyère (n° 82, théorème VII) est limitée par les deux plans obliques Lm' et Fm''.

Fig. 176.



La construction ci-dessus, appliquée au cylindre horizontal symétrique (*fig.* 175), donne en m_0 le centre de courbure initial.

Cette construction permet de tracer graphiquement par arcs successifs la courbe (F) d'un flotteur horizontal pour un axe d'inclinaison parallèle aux génératrices; et, par points successifs, le lieu des points m, ou la développée de la courbe (F). Ces deux courbes ne dépendent alors que de la forme du maître couple.

2° *Rayon de courbure de la courbe* (C), *lieu des centres des aires constantes détachées par une droite dans le maître couple.* — Ce rayon de courbure r est donné par la formule

$$r = \frac{I}{V} = \frac{1}{12}\frac{L l^3}{L B^2} = \frac{1}{12 B^2} l^3.$$

Ce rayon, quand on fait varier l'inclinaison avec B^2 constant, varie donc comme l^3.

Le second rayon de courbure R de la surface (C) le long de la courbe (C) ne varie pas dans le même rapport que r. On a, en effet,

$$R = \frac{1}{12}\frac{l L^3}{L B^2} = \frac{L^2}{12 B^2} l.$$

Ce second rayon varie donc seulement comme l, c'est-à-dire que le rapport $\frac{r}{R}$ varie comme l^2, le long de la courbe (C).

Flotteur prismatique triangulaire horizontal. — Comme cas particulier, prenons d'abord un flotteur prismatique triangulaire horizontal (*fig.* 177). La courbe (F), lieu des milieux g de la

Fig. 177.

droite détachant une aire constante dans l'angle $F_0 S L_0$, est une hyperbole ayant pour asymptotes SF_0 et SL_0.

Prenons, en effet, pour axes, en coordonnées obliques les droites SF_0 et SL_0, et pour une flottaison quelconque FL, posons $SF = b$,

$SL = a$. On aura, pour les coordonnées, x et y du point g,

$$x = \frac{a}{2}, \qquad y = \frac{b}{2},$$

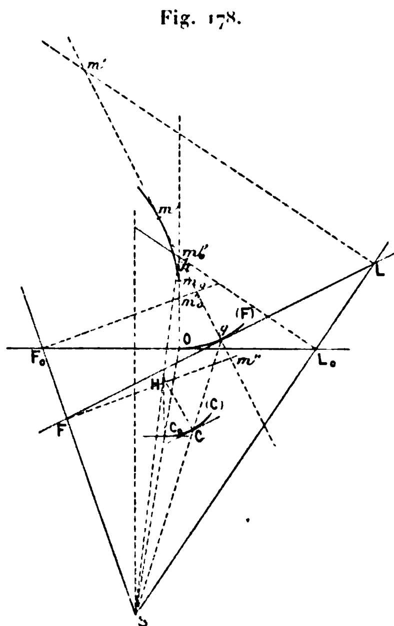
et, comme l'aire FSL est constante ou, autrement dit, que $ab \sin\alpha = \text{const.}$, on trouvera, en éliminant a et b, le lieu

$$xy = \text{const.}$$

qui représente une hyperbole rapportée à ses asymptotes.

La construction du rayon de courbure en g se fera en élevant les perpendiculaires en g à FL, en L à Sx, en F à Sy, et en prenant le point m milieu de $m'm''$. C'est là un moyen curieux de construire par points la développée de l'hyperbole au moyen de ses asymptotes. La courbe (C), lieu des centres des aires constantes détachées par une droite dans l'angle F_0SL_0, est aussi une hyperbole admettant les mêmes asymptotes que la courbe (F). En effet, le point C correspondant à la flottaison quelconque FL et à son point milieu g est sur la ligne Sg et à une distance $SC = \frac{2}{3}Sg$, donc le lieu de C est une hyperbole directement homothétique à l'hyperbole (F) par rapport à son centre S. Le point C est aussi le milieu de la ligne fl parallèle à la flottaison FL. On construira donc par points la développée de la courbe (C) ou développée métacentrique, à l'aide de la règle seule, en élevant les perpendiculaires en f, C et l, à SF_0, fl et SL_0, comme nous venons de le faire pour la développée de la courbe (F).

Fig. 178.



Le point H ou faux métacentre correspondant à une flottaison quelconque isocarène FL s'obtiendra graphiquement (*fig.* 178) en prenant le point C aux $\frac{2}{3}$ de Sg, en élevant en C une perpendiculaire à FL et en marquant l'intersection de cette perpendiculaire

avec celle menée par C_0 à F_0L_0 ; ce qui revient à mener en g, milieu de FL, une normale à FL qui coupe la normale en O, milieu de F_0L_0 au point h ; puis à joindre Sh et à prendre $SH = \frac{2}{3}Sh$.

Flotteur prismatique parallélépipédique horizontal. — Ce cas est celui des pontons, et présente par suite un grand intérêt pratique. Soit le prisme à arêtes horizontales et à section médiane

Fig. 179.

rectangulaire ABED. Nous prendrons pour position initiale celle où les côtés AB et DE de cette section seront eux-mêmes horizontaux (*fig.* 179).

Pendant l'inclinaison, tant que la flottaison rencontrera les deux côtés parallèles BE et AD, la courbe (F) se réduira au point O, milieu de F_0L_0, et le point C se déplacera sur un arc de parabole C_0C_1 à sommet en C_0, parce qu'alors le flotteur forme aussi

un cylindre à génératrices verticales dont la base n'émerge pas, et que, dans ce cas (*voir* paragraphe suivant, 88), la surface (C) est un paraboloïde à un axe vertical. De DL_1 en F_2B le flotteur est un prisme triangulaire horizontal, le point C se déplace donc de C_1 en C_2 sur un arc d'hyperbole avec sommet en C′ sur la bissectrice EC′ à 45°; de F_2B en F_3L_3 le flotteur forme cylindre à génératrices verticales à base constamment immergée, et l'arc C_2C_3 est un arc de parabole à sommet en C_3. Puis les circonstances étudiées se reproduisent en ordre inverse successivement dans les quatre quadrants.

La courbe (F) de notre carène sera homothétique de (C) par rapport au point O dans l'angle DOE (c'est-à-dire qu'elle se réduira dans cet angle au point O lui-même); elle sera ensuite, de O en O′, homothétique de (C) par rapport au point E, ce sera donc une hyperbole avec tangente DL_1 en O et BF_2 en O′; puis dans l'angle EO′B elle sera homothétique de (C) par rapport au point O′, c'est-à-dire se réduira alors au point O′. La courbe (F) se compose donc de quatre arcs d'hyperbole symétriques, comme la courbe (C), par rapport aux deux axes du rectangle It et It'. Ces quatre arcs sont séparés par des points d'arrêt (O, O′, ...).

La carène complémentaire de la carène étudiée a même courbe (F) et une courbe (C_a) homothétique de (C) par rapport au centre I du rectangle qui forme section droite du prisme.

Voyons maintenant les particularités des développées. Prenons d'abord la développée métacentrique de la carène étudiée. Sur la courbe (C), les sommets C_0, C', C_3 des deux paraboles et de l'hyperbole correspondant à des rayons de courbure minimum, les points de séparation des arcs C_1 et C_2 sont des points où le rayon de courbure est le même pour la parabole et l'hyperbole, puisque $r = \frac{I}{V}$ des deux côtés, et ces rayons de courbure communs sont des maximums. Dès lors la développée métacentrique part d'un premier point D_0 donné par

$$\overline{C_0D_0} = r_0 = \frac{2}{3}\left(\frac{l_0}{2}\right)^3 \frac{1}{2\,\frac{l_0}{2}\,t_0} = \frac{1}{3}\,\frac{l_0^2}{4\,t_0} = \frac{l_0^2}{12\,t_0},$$

puis s'éloigne en présentant des rebroussements sur les normales en C_1, C', C_2, pour aboutir en D_3 sur IC_3. Si l'on complète la courbe, on aura aussi des rebroussements en D_0 et en D_3. Les

rayons de courbure successifs sont donnés, comme nous le savons, dans le cas des flotteurs cylindriques horizontaux par

$$r = \frac{1}{12}\frac{l^3}{B^2};$$

on aura donc

$$\frac{r}{r_0} = \frac{l^3}{l_0^3}.$$

Passons à la développée de la courbe (F). Comme cette courbe se compose, en somme, de quatre points et de quatre arcs d'hyperbole homothétiques des arcs $\overline{C_1C_2}$ par rapport aux sommets A, B, E, D, sa développée se composera des quatre mêmes points et de quatre arcs d_1, d', d_2, homothétiques, par rapport aux sommets A, B, E, D, des arcs D_1, D′, D_2, avec points de rebroussement sur les bissectrices des quatre angles A, B, C, D.

Enfin, la développée de la courbe (C) de la carène complémentaire sera homothétique de la développée $D_0D_1D'D_2D_3$ par rapport au centre I du rectangle section droite.

Flotteur prismatique horizontal à section droite irrégulière. — Si la section droite du flotteur prismatique horizontal est un polygone irrégulier ABCDEFGH (*fig.* 180), on considérera les prolongements des deux faces coupées par la flottaison, AH et BC, et la carène complémentaire fictive F_0SL_0, qui est un

Fig. 180.

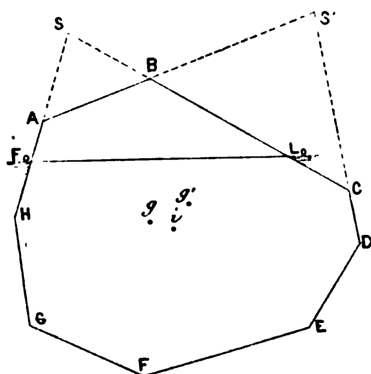
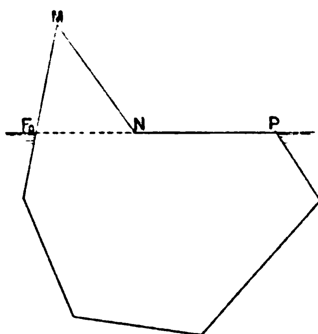


Fig. 181.



prisme triangulaire horizontal dont on sait trouver les surfaces (C) et (F). Soit maintenant le centre g de l'aire HSCDEFG, facile à déduire du centre i de l'aire du polygone donné. La surface

(F) de la carène réelle aura un arc confondu avec la surface (F) de la carène complémentaire; la surface (C) de la carène réelle aura un arc homothétique, par rapport au point g, de la surface (C) de la carène complémentaire. Les points limites de la partie utile de la courbe ainsi construite correspondront aux flottaisons qui passent en A et en B.

On passera ensuite à une autre carène triangulaire complémentaire AS′D fournissant un autre centre g' de l'aire AS′DEFGH; et un autre arc de la courbe (C) de la carène réelle. Cette courbe (C) se composera donc d'une série d'arcs d'hyperboles. Aux points de raccordement, ces arcs auront non seulement une tangente commune, mais encore un rayon de courbure commun, parce que la valeur $r = \frac{I}{V} = \frac{1}{12}\frac{l^3}{B^2}$ de ce rayon varie avec l d'une manière continue, à moins toutefois que la longueur l de la trace de la flottaison isocarène ne vienne à varier brusquement d'une quantité finie pour une inclinaison infiniment petite. Ce cas se présenterait si, par exemple, le polygone section droite avait un angle rentrant MNP (*fig.* 181) et si la trace de la flottaison isocarène venait, dans une de ses positions, coïncider précisément avec un des côtés MN ou NP de cet angle. Si deux côtés opposés du polygone, rencontrés par une même flottaison, étaient parallèles, alors la courbe (C) comprendrait dans cette région un arc de parabole.

88. Flotteur cylindrique vertical.

Soit un flotteur à génératrices verticales et à section droite quelconque. Marquons la flottaison droite horizontale F_0L_0 (*fig.* 182) et une flottaison isocarène FL inclinée sur F_0L_0 d'un angle fini θ, qui coupe la première suivant la droite YY.

Nous allons montrer d'abord que, pour un tel flotteur et tant que la base du cylindre n'émerge pas, la surface (F) se réduit au point g centre de l'aire de la flottaison droite F_0L_0. Il suffit pour cela de montrer que le centre de l'aire d'une flottaison isocarène quelconque est confondu avec le point g.

Soit donc la flottaison isocarène quelconque FL; les volumes des onglets d'émersion ou d'immersion étant égaux, on peut

écrire, ou bien

$$\int\!\!\int d\omega_0 i_0 \operatorname{tang}\theta = \int\!\!\int d\omega'_0 e_0 \operatorname{tang}\theta,$$

ou

$$\int\!\!\int d\omega \cos\theta \, i \sin\theta = \int\!\!\int d\omega' \cos\theta \, e \sin\theta;$$

c'est-à-dire, ou bien

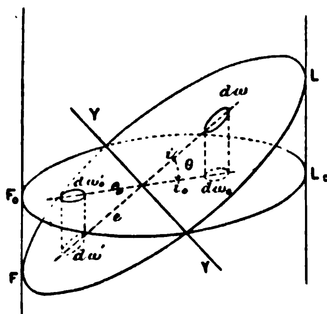
$$(1) \qquad \int\!\!\int i_0 \, d\omega_0 - \int\!\!\int e_0 \, d\omega'_0 = 0,$$

ou

$$(2) \qquad \int\!\!\int i \, d\omega - \int\!\!\int e \, d\omega = 0.$$

Ces deux équations montrent que les centres de gravité de F_0L_0 et de FL sont tous deux sur YY. La courbe (F), sur le plan d'in-

Fig. 182.



clinaison perpendiculaire à YY et passant par le point g, se réduit donc au point g, tant que FL n'atteint pas la base du cylindre, et, comme cela a lieu quelle que soit la direction de YY, puisque la flottaison FL a été prise quelconque, la surface (F) du flotteur se réduit bien au point g lui-même, sauf pour la région de l'espace où les flottaisons isocarènes coupent l'une ou l'autre des bases du flotteur.

On aurait pu arriver à cette conclusion en remarquant qu'un système de flottaisons parallèles quelconques (celles parallèles à FL, par exemple) donne I_Y (aire FL) = const., c'est-à-dire dI_Y (aire FL) = 0, c'est-à-dire $\frac{dI_Y(\text{aire FL})}{dV} = \iota = 0$. On a donc $\iota = 0$ pour toutes les flottaisons qui ne rencontrent pas l'une ou

l'autre des bases du cylindre et pour une direction quelconque de l'axe YY. On arriverait encore au même résultat en considérant la *surface réglée supplémentaire* de la carène pour l'axe YY et une flottaison FL quelconque.

Cherchons maintenant la surface (C) du flotteur cylindrique vertical. Nous prendrons pour cela les moments des onglets par rapport à trois plans de projection définis par les axes suivants : C_0Z, vertical, passant par le centre C_0 de la carène droite initiale; C_0Y parallèle à l'axe d'inclinaison choisi YY; C_0X perpendiculaire aux deux premiers.

La somme des moments des onglets d'émersion et d'immersion, pour un angle quelconque fini θ, par rapport au plan C_0XY donnera le Z du point C correspondant de la surface (C)

$$V_0Z = \int\int(d\omega_0 i_0 \tang\theta)\left(\frac{z_0+i_0\tang\theta}{2}\right) - \int\int(d\omega'_0 e_0 \tang\theta)\left(\frac{z_0-e_0\tang\theta}{2}\right),$$

en appelant z_0 la distance au plan C_0XY de la flottaison droite initiale. On tire de là

$$V_0Z = z_0\tang\theta\left(\int\int i_0\,d\omega_0 - \int\int e_0\,d\omega'_0\right) + \frac{\tang^2\theta}{2}\int\int(i_0^2\,d\omega_0 + e_0^2\,d\omega'_0) = \frac{\tang^2\theta}{2}\,I_Y\,(\text{aire } F_0L_0).$$

Prenons les moments par rapport au plan ZC_0Y pour avoir l'X du point C

$$V_0X = \int\int(d\omega_0 i_0\tang\theta)i_0 + \int\int(d\omega'_0 e_0 \tang\theta)e_0$$
$$= \tang\theta\int\int(i_0^2\,d\omega_0 + e_0^2\,d\omega'_0) = \tang\theta\,I_Y(\text{aire } F_0L_0).$$

Prenons enfin les moments par rapport au plan ZC_0X, il viendra

$$V_0Y = \int_0^a\int_0^b(d\omega_0 i_0\tang\theta)y_0 - \int_0^{-a}\int_0^b(d\omega_0 i_0\tang\theta)y'_0$$
$$+\int_0^{-a'}\int_0^{-b'}(d\omega'_0 e_0\tang\theta)y''_0 - \int_0^{a'}\int_0^{-b'}(d\omega'_0 e_0\tang\theta)y'''_0$$

ou

$$V_0Y = \tang\theta\int\int d\omega\,(i_0y_0 - i_0y'_0 + e_0y''_0 - e_0y'''_0) = \tang\theta\,P_{XY}(\text{aire } F_0L_0).$$

En éliminant θ, qui n'entre que par sa tangente entre les trois coordonnées X, Y, Z, on aura le lieu du point C, pour une direction YY constante de l'axe d'inclinaison ; c'est une courbe gauche dont les équations sont

$$(1) \qquad Z = \frac{V_0}{2 I_Y} X^2,$$

$$(2) \qquad X = \frac{P_{XY}}{I_Y} Y.$$

L'équation (2) montre que cette courbe est plane ; l'équation (1) que c'est une parabole.

Si maintenant nous faisons varier l'inclinaison, en désignant par α l'angle d'orientation variable de l'axe d'inclinaison YY avec la direction fixe du grand axe gl' de l'ellipse d'inertie de $F_0 L_0$, nous aurons

$$I_Y = I_{L'} \cos^2\alpha + I_{M'} \sin^2\alpha$$

et

$$P_{XY} = (I_{M'} - I_{L'}) \sin\alpha \cos\alpha;$$

d'où

$$X = \operatorname{tang}\theta (r_1 \cos^2\alpha + R_1 \sin^2\alpha),$$
$$Y = \operatorname{tang}\theta (R_1 - r_1) \sin\alpha \cos\alpha,$$
$$Z = \frac{\operatorname{tang}^2\theta}{2} (r_1 \cos^2\alpha + R_1 \sin^2\alpha).$$

Or, en prenant pour la surface (C) de nouveaux axes, $C_0 L'$, $C_0 M'$, fixes et parallèles aux axes de l'ellipse d'inertie de $F_0 L_0$, le point C a pour nouvelles coordonnées

$$x = X \cos\alpha - Y \sin\alpha,$$
$$y = + X \sin\alpha + Y \cos\alpha,$$
$$z = Z,$$

c'est-à-dire, en remplaçant,

$$x = \operatorname{tang}\theta \, r_1 \cos\alpha,$$
$$y = \operatorname{tang}\theta \, R_1 \sin\alpha,$$
$$z = \frac{\operatorname{tang}^2\theta}{2} (r_1 \cos^2\alpha + R_1 \sin^2\alpha);$$

d'où l'équation de la surface (C), en éliminant, entre ces trois relations, θ et α,

$$2z = \frac{x^2}{r_1} + \frac{y^2}{R_1}$$

ou encore

$$\frac{2z}{V_0} = \frac{x^2}{I_{L'}} + \frac{y^2}{I_{M'}}:$$

c'est l'équation d'un paraboloïde elliptique.

On voit aussi sous cette forme que le paraboloïde osculateur en C_0 à la surface (C) d'un flotteur quelconque est lui-même la surface (C) du cylindre vertical qui aurait pour base la flottaison droite F_0L_0 du flotteur.

Enfin, pour un parallélépipède ou prisme vertical à base rectangulaire de longueur L, de largeur l, et de tirant d'eau t, la surface (C) a pour équation

$$\frac{2z}{Llt} = \frac{x^2}{\frac{Ll^3}{12}} + \frac{y^2}{\frac{L^3l}{12}}.$$

ou

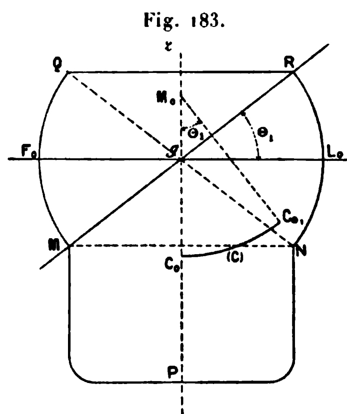
$$\frac{z}{6t} = \frac{x^2}{l^2} + \frac{y^2}{L^2},$$

l'origine des axes étant par ailleurs au milieu du tirant d'eau, t.

89. Flotteur à onglets en surfaces de révolution horizontales.

Soit un flotteur constitué par une carène quelconque MPN (*fig.* 183) surmontée d'une partie MNQR en forme de surface de

Fig. 183.



révolution à axe horizontal. Supposons que la flottaison droite F_0L_0 contienne l'axe, et cherchons dans ces conditions les courbes (F) et (C) sur un plan d'inclinaison perpendiculaire à l'axe g.

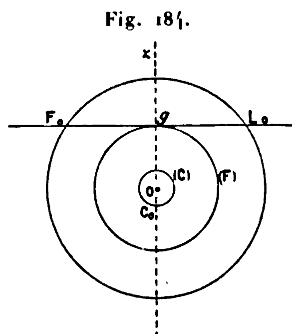
Toutes les flottaisons menées par g qui rencontreront la portion de surface de révolution seront identiques; elles auront leur centre de gravité sur l'axe g et leurs facteurs d'inertie resteront alors constants. Dès lors sur tout l'arc Θ_1, compris entre la flottaison F_0L_0 et la flottaison extrême MR, la courbe (F) se réduira au point g et la courbe (C) à un cercle de rayon $M_0C_0 = \frac{I_{gy}}{V_0}$.

On peut dire encore qu'ici la *surface réglée supplémentaire* de la carène a un volume nul pour toute flottaison comprise dans l'angle Θ_1, puisque, alors, le long d'une flottaison, les normales aux contours des différents couples sont situées dans le plan même de cette flottaison. Dès lors pour l'axe d'inclinaison choisi et dans tout l'angle Θ_1, on a $\mathfrak{r} = 0$ et la courbe (F) se réduit au point g.

90. Flotteur de révolution à axe horizontal.

Prenons maintenant le cas du bateau-cigare à axe horizontal, à flottaison droite quelconque, c'est-à-dire ne passant pas par son axe O (*fig.* 184), et cherchons les courbes (F) et (C) pour un axe d'inclinaison de direction fixe parallèle à l'axe O.

Fig. 184.



On voit de suite que la courbe (F) est, dans le plan d'inclinaison confondu avec le maître couple, un cercle tangent à la trace de F_0L_0 sur ce plan. De même, la courbe (C) est un cercle de rayon OC_0, car le point C_0 a une position fixe sur le rayon Og perpendiculaire à F_0L_0, quelle que soit la position de cette flottaison F_0L_0 par rapport au flotteur.

Si, pour trouver la courbe (F), on considère ici la *surface réglée supplémentaire* de la carène, on dira : le long d'une flottaison isocarène quelconque F_0L_0, les normales aux contours des couples aboutissent toutes sur l'axe du flotteur, O; la surface réglée devient donc un conoïde pour lequel

$$r = \frac{\int hy\,dx}{\int y\,dx} = h = \overline{Og} = \text{const.};$$

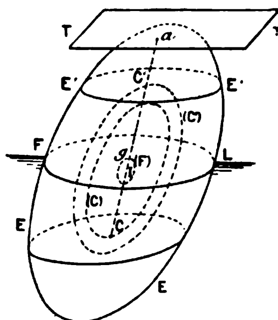
la courbe (F) est donc un cercle.

Les résultats trouvés ci-dessus pour (F) et (C) sont encore applicables, mais sur un certain angle Θ_1 seulement, facile à déterminer, si la carène n'est de révolution qu'au voisinage d'une certaine flottaison et jusqu'à un plan parallèle à l'axe de révolution.

91. Flotteur ellipsoïdal, paraboloïdal, hyperboloïdal et conique.

Flotteur ellipsoïdal. — Considérons un ellipsoïde flottant avec un certain plan de flottaison FL (*fig.* 185) dont le centre de gravité est en g. Cherchons d'abord la surface (F) enveloppe des flottaisons isocarènes FL, qui n'est autre, comme on sait,

Fig. 185.



que le lieu du point g. La droite qui joint le centre de l'ellipsoïde I au point g est une direction conjuguée par rapport au plan FL, et aussi par rapport au plan TT tangent en a à l'ellipsoïde.

Nous avons donc ici deux plans parallèles tangents aux points a et g, où ils sont traversés par un même vecteur issu du point fixe I, l'un à l'ellipsoïde E, l'autre à une surface (F). Donc, ainsi

qu'il a été dit au n° 85, théorème III, ces deux surfaces sont homothétiques par rapport au point I. Donc la surface (F) d'un ellipsoïde est un ellipsoïde homothétique au premier par rapport à son centre I.

Cherchons maintenant la surface (C) de la portion immergée E de l'ellipsoïde et la surface (C') de la portion complémentaire. Pour la flottaison FL les points C et C' se trouvent sur la droite Ig, lieu des centres de gravité des sections parallèles à FL, et en C, comme en C', les plans tangents aux surfaces (C) et (C') sont parallèles à FL; le même raisonnement qui nous a fait trouver la surface (F) est donc applicable aux surfaces (C) et (C'), et l'on peut dire que les surfaces (C) et (C') sont aussi des ellipsoïdes homothétiques de l'ellipsoïde donné par rapport à son centre I.

Flotteur hyperboloïdal. — Soit un flotteur constitué par une portion MPN (*fig.* 186) d'un hyperboloïde à deux nappes, avec base plane MN et sommet P immergé. Menons une flottaison iso-

Fig. 186.

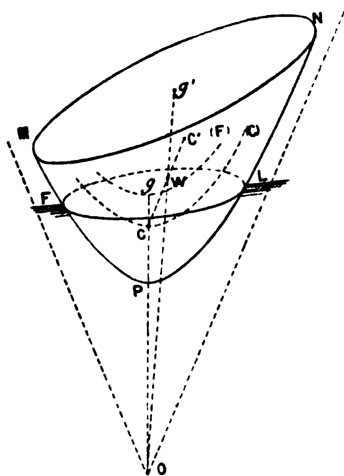
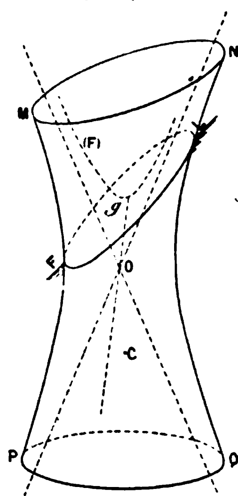


Fig. 187.



carène quelconque FL dont le centre de gravité est en g. Les surfaces (F), lieu du point g, et (C), lieu du point C, centre de la carène FPL, sont encore des hyperboloïdes homothétiques de l'hyperboloïde proposé par rapport à son centre O, tant que la flottaison ne coupe pas le plan de base.

Si le flotteur est constitué par la portion FMNL du même

hyperboloïde (sommet S émergé), nous remarquerons que cette portion FMNL est complémentaire de celle FPL, considérée en premier lieu. La surface (F) sera donc celle que nous venons de trouver; mais, pour avoir la surface (C), nous prendrons le centre W de la carène totale, qui se trouve sur la ligne joignant le point O au centre g' de la base MN; nous construirons l'hyperboloïde (C) homothétique du proposé par rapport au point O, puis un second hyperboloïde (C') homothétique de (C) par rapport au point W.

Si enfin le flotteur est constitué par une portion d'hyperboloïde à une nappe terminée par une base plane, la surface (F) est homothétique, par rapport au centre O, de l'hyperboloïde à deux nappes complémentaire; mais il n'en est pas de même de la surface (C), parce que le point (C) n'est pas, en général, sur la ligne Og; il n'est sur cette ligne que pour la seule flottaison isocarène FL qui est parallèle au plan de base PQ (*fig.* 187).

Flotteur paraboloïdal. — Le cas du flotteur paraboloïdal, terminé par une base plane, se déduit de celui du flotteur ellipsoïdal en éloignant le centre O à l'infini sur l'un des axes de l'ellipsoïde. Les surfaces (F) et (C) sont alors homothétiques du

Fig. 188.

paraboloïde proposé par rapport à un point situé à l'infini, c'est-à-dire qu'elles sont alors formées par deux portions de paraboloïdes identiques au paraboloïde proposé. C'est, pour l'une comme pour l'autre de ces surfaces, le paraboloïde proposé lui-même que l'on aurait remonté par une translation effectuée suivant l'axe SO (*fig.* 188), de façon à le faire passer par les points initiaux g ou C.

La surface (C′) de la carène complémentaire sera, tant que la flottaison ne coupera pas la base MN, homothétique de (C) par rapport au centre W de la carène totale, centre qui se trouve, d'ailleurs, sur la parallèle à l'axe SO menée par le centre g' de la base MN.

Flotteur conique. — Soit un flotteur conique avec base plane MN et sommet S immergé. La surface (F) est l'hyperboloïde passant par g et asymptote au cône donné, tant que la flottaison ne touche pas la base MN (*fig.* 189).

Fig. 189.

De même, pour la surface (C), c'est l'hyperboloïde asymptote au cône et passant par le point C situé au quart de Sg à partir de g.

Pour le flotteur complémentaire FMNL, qui a même surface (F), il faut, pour la surface (C′), comme toujours, considérer le centre W de la carène totale comme centre d'homothétie. Ce centre W est d'ailleurs au quart de Sg', à partir de g'.

92. Flotteur pyramidal.

Soit une pyramide triangulaire SABC avec sommet S (*fig.* 190) immergé et présentant une flottaison quelconque FL.

Prenons pour axes en coordonnées obliques les trois droites SA, SB, SC. Les coordonnées de g seront

$$x = \frac{a}{3}, \qquad y = \frac{b}{3}, \qquad z = \frac{c}{3},$$

en appelant a, b, c les longueurs SF, SM et SL. Mais le volume

immergé étant supposé constant, on a

$$V = \frac{ab}{2}\sin(x,y)\,\frac{c}{3}\sin(z,xy) = \text{const.}$$

ou

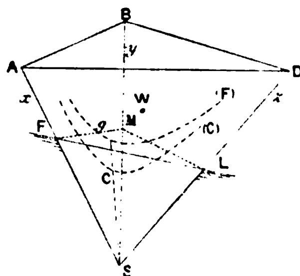
$$abc = \text{const.};$$

d'où, pour équation du lieu de g,

$$xyz = \text{const.}$$

C'est un hyperboloïde du troisième degré à deux nappes, asymptote aux trois plans coordonnés.

Fig. 190.



La surface (C) est homothétique de (F) par rapport au sommet S, puisque le point C est constamment sur le vecteur Sg, aux $\frac{3}{4}$ de Sg, à partir de S.

Pour la surface (C') de la portion complémentaire FABCL, on considérera, comme toujours, et tant que la flottaison FL ne touchera pas la base ABC, le centre W de la pyramide totale comme centre d'homothétie.

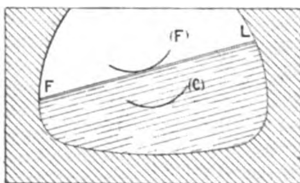
93. Carènes intérieures.

Les considérations géométriques qui s'appliquent aux flotteurs sont aussi, et intégralement, applicables à un volume quelconque de liquide contenu à l'intérieur d'un vase de forme quelconque.

L'enveloppe de la surface libre du liquide donne la surface (F)

(*fig*. 191) de l'isocarène intérieure. Le centre de gravité du liquide intérieur, dont le lieu est la surface (C) de l'isocarène inté-

Fig. 191.



rieure, s'obtient comme pour les carènes mouillées extérieurement.

FIN DU TOME PREMIER.

TABLE DES MATIÈRES

CONTENUES DANS LE TOME I.

PREMIÈRE PARTIE.

CALCUL DES ÉLÉMENTS GÉOMÉTRIQUES DES CARÈNES DROITES ET INCLINÉES.

CHAPITRE I. — FORMULES DE QUADRATURE EN USAGE DANS LA THÉORIE DU NAVIRE.

CHAPITRE II. — FORMULES APPROCHÉES APPLICABLES AUX SURFACES TOPOGRAPHIQUES OU TABULAIRES.

CHAPITRE III. — Courbes différentielles et intégrales.

CHAPITRE IV. — (33) PLANIMÈTRES, INTÉGROMÈTRES, INTÉGRAPHES.

CHAPITRE V. — APPLICATION AU NAVIRE DES MÉTHODES DE CALCUL POUR LES CARÈNES DROITES.

CHAPITRE VI. — APPLICATION AU NAVIRE DES MÉTHODES DE CALCUL POUR LES CARÈNES INCLINÉES. (INTERPOLATION GRAPHIQUE DES FONCTIONS TABULAIRES A DEUX VARIABLES.)

CHAPITRE VII. — APPLICATION AU NAVIRE DES MÉTHODES DE CALCUL POUR LES CARÈNES INCLINÉES. (MÉTHODES EMPLOYANT DES RÉSEAUX DE SECTIONS SPÉCIAUX.)

CHAPITRE VIII. — APPLICATION AU NAVIRE DES MÉTHODES DE CALCUL POUR LES CARÈNES INCLINÉES. (MÉTHODES EMPLOYANT LE RÉSEAU DES SECTIONS DROITES DU PLAN DES FORMES.)

CHAPITRE IX. — APPLICATION AU NAVIRE DES MÉTHODES DE CALCUL POUR LES CARÈNES INCLINÉES. (MÉTHODES EMPLOYANT LES ONGLETS IMMERGÉS OU ÉMERGÉS, C'EST-A-DIRE LES ORDONNÉES DES FLOTTAISONS INCLINÉES.)

CHAPITRE X. — APPLICATION AU NAVIRE DES MÉTHODES DE CALCUL POUR LES CARÈNES INCLINÉES. (MÉTHODE EMPLOYANT SEULEMENT LES ORDONNÉES D'UN NOMBRE LIMITÉ DE FLOTTAISONS DROITES.)

CHAPITRE XI. — MÉTHODES EXPÉRIMENTALES PROPRES A DÉTERMINER EXACTEMENT LES ÉLÉMENTS GÉOMÉTRIQUES DES CARÈNES INCLINÉES.

CHAPITRE XII. — APPLICATION AU NAVIRE DES MÉTHODES DE CALCUL POUR LES CARÈNES INCLINÉES. (MÉTHODES APPROXIMATIVES RAPIDES.)

DEUXIÈME PARTIE.

GÉOMÉTRIE DU NAVIRE.

CHAPITRE XIII. — PRÉLIMINAIRES DE MECANIQUE. DÉCOMPOSITION DU DÉPLACEMENT LE PLUS GÉNÉRAL D'UN FLOTTEUR.

CHAPITRE XIV. — GÉOMÉTRIE DE LA SURFACE (C) DES ISOCARÈNES DE VOLUME V_0.

CHAPITRE XV. — Géométrie de la surface (F) des isocarènes de volume V_0.

CHAPITRE XVI. — Géométrie de la surface (T) des tranches isocarènes de volume ΔV_0, additives au volume V_0.

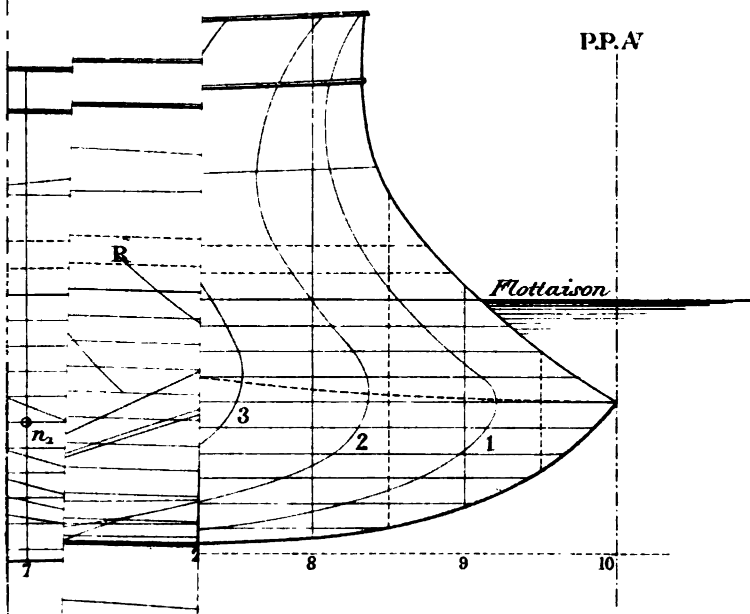
CHAPITRE XVII. — Géométrie des carènes symétriques, complémentaires et supplémentaires.

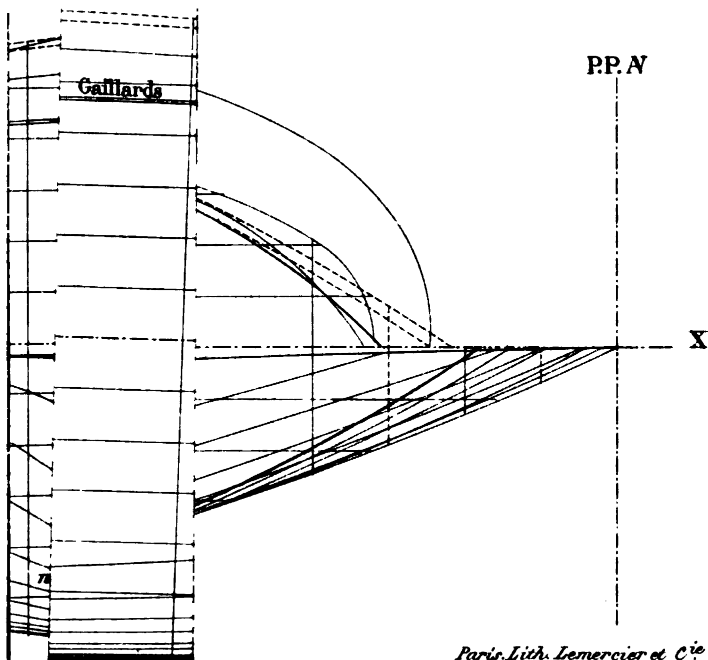
CHAPITRE XVIII. — Exercices de géométrie du navire. — Surfaces (F) et (C) de flotteurs à formes géométriques.

FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES DU TOME PREMIER.

15842 Paris. — Imprimerie GAUTHIER-VILLARS ET FILS, quai des Grands-Augustins, 55.

Planche I.





Paris. Lith. Lemercier et Cie

